PER LA STORIA E LA FILOSOFIA DELLE MATEMATICHE
COLLEZIONE DIRETTA DA FEDERIGO ENRIQUES
PROMOSSA
DALL'ISTITUTO NAZIONALE PER LA STORIA DELLE SCIENZE FISICHE E MATEMATICHE

N. 4.

ENRICO RUFINI

IL "METODO" DI ARCHIMEDE E LE ORIGINI DELL'ANALISI INFINITESIMALE NELL'ANTICHITÀ

MCMXXVI
CASA EDITRICE ALBERTO STOCK
ROMA
VIA ENNIO QUIRINO VISCONTI, 13

Questo studio che, prendendo occasione dal « Metodo » di Archimede, si allarga al problema delle origini e dello sviluppo dell'analisi infinitesimale nell'antichità, vede la luce quando il suo autore non può più gioire dei consensi o riflettere sulle critiche che esso è per suscitare.

Un breve tifo ha spento, a Roma, la vita di Enrico Rufini *piena di promesse, togliendolo crudelmente alla famiglia e alla scienza, il 3 novembre 1924: ora ei riposa nella sua Rocca di Papa, ov'era nato, 34 anni prima, il 26 novembre 1890!*

Per la versatilità dell'ingegno e per la varietà degli studi, il Rufini s'allontanava assai dalla comune dei nostri giovani: le Matematiche, le Lettere e la Filosofia lo interessavano quasi in egual grado, e questa varia cultura doveva poi avviarlo assai naturalmente alla storia della scienza. Frattanto i suoi studi venivano interrotti dalla guerra, cui partecipò come ufficiale del genio.

Dimesso dal servizio nel 1919, riusciva a conseguire la laurea in Matematiche all'Università di Roma il 12 gennaio 1920, e quind'innanzi si occupava come insegnante nei Licei « Visconti » e « Tasso » e in alcuni istituti privati della città. Da allora, data anche la sua attività di ricercatore, attratto da Giovanni Vacca nel campo dell'indagine storica, ei si segnalò tosto con alcune pubblicazioni interessanti, particolarmente su « Gli studi geometrici di Eudosso di Cnido » e su « La preistoria delle parallele e il postulato d'Euclide ».[1] *Contemporaneamente era chiamato a lavorare per la Commissione Vinciana, e gli veniva affidata la redazione di un « Sommario ed indice del Codice Atlantico di Leonardo » ch'egli fortunatamente compì con somma cura e pazienza, prima della malattia che l'ha condotto alla tomba.*

Ora la sua mente matura si sentiva capace di affrontare più vasti problemi, quali si pongono allo studioso della storia delle scienze che — sollevandosi sulle ricerche puramente erudite — si accinga a valutare il progresso dei metodi e delle dottrine. Perciò aveva accolto

---

(1) L'elenco degli scritti del Rufini trovasi nella commemorazione di lui pubblicata nell'*Archivio della storia della Scienza* da A. Mieli, dicembre 1924.

con entusiasmo il mio invito a tentare una vasta ricostruzione storica dell'Analisi infinitesimale, che, incominciando dall'antichità, doveva proseguirsi nel Rinascimento, fino a Leibniz e Newton. Purtroppo il lavoro non è potuto andar oltre la prima parte dell'opera, che qui si presenta al lettore. Ma io non credo che mi facciano velo l'amicizia e il rimpianto affettuoso dell'A., nè l'interesse portato a questo studio, dicendo che esso costituisce già una bella sintesi, che getta luce su aspetti men noti del pensiero greco, e vale ad attestare le doti di penetrazione e d'armonia d'una nobile intelligenza.

Il cammino della storia del sapere è tanto duro, che bene occorre essere preparati a percorrerlo. L'erudizione minuta, lo strumento delle lingue, la diligenza del raccogliere e dell'ordinare i materiali di studio, sono richieste anzitutto in maniera pregiudiziale; ma sopra queste doti si domanda allo storico quell'interesse intrinseco per il soggetto, che è vero intelletto scientifico e filosofico, rivolto non tanto allo sviluppo dei resultati quanto alla posizione dei problemi e alle idee ispiratrici delle dottrine, senza del quale l'erudito resta soltanto erudito, traduttore, raccoglitore, ordinatore e non diventa mai storico; chè, incapace di comprendere la scienza nel suo

essere, tanto meno può coglierne il divenire, cioè ricostruirne e valutarne il progresso.

Io spero che chi leggerà queste pagine d'Enrico Rufini sia indotto a pensare che il giovane studioso aveva mente per intendere la storia della scienza nel suo vero significato!

Roma, 10 luglio 1925.

FEDERIGO ENRIQUES.

PARTE PRIMA.

ORIGINI E SVILUPPO DELL'ANALISI INFINITESIMALE FINO AD ARCHIMEDE.

1. – La geometria pitagorica.

In Grecia s'inizia primieramente lo studio teorico della geometria. La geometria, quale esisteva in Egitto e in Oriente prima che divenisse oggetto delle speculazioni greche, non mirava che a scopi pratici e non si occupava che di questioni concrete connesse alle contingenze della vita ordinaria. Secondo la testimonianza di PROCLO [1] fu PITAGORA che cominciò a sollevare lo studio della geometria dall'interesse pratico verso il puro scopo scientifico, mirando sopratutto a un assetto razionale dei suoi principii e a una coordinazione logica delle conoscenze, che man mano ne venivano arricchendo il patrimonio.

---

[1] Cfr. *In primum Euclidis elementorum librum*, pag. 65, 15: « PITAGORA trasformò lo studio della geometria in una specie di insegnamento liberale, esaminandone i principii da un punto di vista superiore e studiandone i teoremi in una maniera immateriale e intellettuale ».

È probabile che il primo stimolo a questo studio teorico sia derivato dalle precedenti speculazioni cosmologiche dei filosofi ionici ([1]). In altre parole, la concezione che ebbero della geometria i Pitagorici primitivi deve esser posta in relazione con la loro teoria circa la natura delle cose.

Ora è noto come una tale teoria sia riassunta nella formula « le cose sono numeri »; la quale formula, nel periodo più antico, voleva significare che la materia fosse costituita di punti materiali o *monadi* (μονάδες, unità aventi posizione) e che le differenze qualitative dipendessero soltanto dal numero e dalla posizione di quei punti. Questa interpretazione (suggerita dal TANNERY) si potrebbe ancora meglio precisare, ove si vogliano ricollegare (come fa l'ENRIQUES) le vedute pitagoriche alle idee di ANASSIMANDRO. Questi avanzò l'ipotesi che il sostrato naturale delle cose fosse una sostanza indeterminata, infinitamente diffusibile (τὸ ἄπειρον); da questa ipotesi può derivare la struttura monadica della materia

---

([1]) Sull'interpretazione da attribuire alla geometria pitagorica e all'opera di PARMENIDE e di ZENONE il lettore può vedere, oltre l'opera di P. TANNERY, i recenti studi di F. ENRIQUES, che vengono qui largamente riassunti.

sensibile proposta da PITAGORA, supponendo una condensazione della sostanza primitiva intorno a certi punti o centri monadici, i quali per conseguenza dovevano rimanere delimitati da un circostante vuoto, o, forse meglio, da un mezzo etereo rarefatto, della natura del fuoco.

Sulla teoria della materia fu modellata quella della geometria. Sostrato delle figure geometriche era una materia illimitatamente estesa e infinitamente divisibile, non diversa dalla sostanza cosmica di ANASSIMANDRO, con la quale si identificava il concetto di spazio. Le figure geometriche erano limitazioni o determinazioni di tale spazio, e quindi forme di una materia universale, che si ritrova identica nelle cose sensibili qualitativamente diverse. In tal modo la geometria, se pur non veniva trasportata d'un tratto nel regno dell'intelligibile, si sollevava però sopra la volgare concezione empirica e conferiva alle figure geometriche un certo grado di astrazione.

Ma era questo soltanto un primo grado di astrazione, poichè il presupposto empirico rimaneva ancora alla base della concezione pitagorica. Si riteneva infatti che l'elemento primitivo delle figure geometri-

che fosse precisamente la *monade;* e così il punto geometrico appariva ancora come punto materiale, ad un tempo esteso e indivisibile. E come tutte le cose erano numeri, cioè somma di unità, così ogni figura geometrica era una somma di punti.

Questa concezione esercitò senza dubbio una benefica influenza per il progresso della geometria, specialmente per ciò che riguarda la teoria delle proporzioni, della similitudine e della misura delle grandezze. Ma l'ipotesi fondamentale del punto-monade doveva fatalmente urtare con la scoperta delle grandezze incommensurabili avvenuta in seno alla stessa scuola pitagorica, scoperta che minacciava di rovinare l'edificio scientifico con tanta cura costruito. La leggenda racconta che fosse impartito ordine severissimo di non rivelarla a profani; IPPASO da Metaponto, che tradì il segreto, fu espulso dalla scuola e, raggiunto dall'ira degli Dei, perì in un naufragio. Ma intanto la nuova scoperta aveva sollevato delle difficoltà, aveva aperto delle discussioni fra gli stessi Pitagorici, e aveva mostrato la necessità di rivedere i principii su cui l'edifizio geometrico era fondato.

2. – La critica di Parmenide d'Elea.

A risolvere la crisi che travagliava la geometria pitagorica fu diretta (secondo TANNERY) l'opera della scuola d'Elea, opera che fu efficacemente iniziata da PARMENIDE (verso il 500 a C., come ha mostrato l'ENRIQUES). Infatti il poema parmenideo *Sulla natura* (περὶ φύσεως) acquista un significato particolarmente chiaro e suggestivo, ove esso si consideri non come un trattato puramente metafisico, ma in parte anche (secondo l'interpretazione rimessa appunto in valore dall'ENRIQUES) come diretto a criticare la teoria monadica dei Pitagorici, e quindi anche la loro concezione empirica degli enti fondamentali della geometria: punto, linea, superficie.

Che PARMENIDE si fosse occupato delle questioni inerenti ai principii della geometria lo si ricava da due citazioni di PROCLO: una delle quali riporta una classificazione delle figure proposta dall'Eleate; l'altra attesta che la definizione euclidea (*Elem.*, I, def. 1) « il punto è ciò che non ha parti » è conforme al criterio di PARMENIDE, secondo cui le definizioni negative convengono ai principii. PARMENIDE dunque avrebbe cercato di definire i primi concetti della geo-

metria, e perciò non farà meraviglia se nei suoi scritti ritroviamo accenni alla critica da lui istituita.

A tal proposito meritano di essere qui specialmente ricordati due passi del poema parmenideo, già illustrati dall'ENRIQUES:

il *fr.* 2, che contiene un accenno al concetto della superficie senza spessore, come quella « che non separa lo spazio dalla connessione dello spazio » (DIELS, pag. 151);

il *fr.* 6, che è una forte requisitoria delle varie soluzioni proposte dai Pitagorici circa il concetto di punto. Egli li rimprovera di essere « sordi insieme e ciechi, istupiditi, senza discernimento », perchè non vedono la contraddizione che consiste nel ritenere « che essere e non essere sia la stessa cosa e non la stessa cosa » (DIELS, pag. 153). In altre parole, PARMENIDE condanna il concetto del punto-monade come qualche cosa di contradditorio, di cui si afferma e si nega ad un tempo l'esistenza (o l'estensione), e che doveva a lui apparire come un bastardo infinitesimo attuale.

Nell'opera di PARMENIDE si afferma dunque per la prima volta il concetto razionale del punto, della linea e della superficie; la sua critica tende in sostanza

a stabilire che gli enti geometrici non possono definirsi che per astrazione, con un procedimento indefinito di idealizzazione, come limiti del sensibile. Ora questa affermazione costituisce il primo riconoscimento del carattere infinitesimale dei concetti fondamentali della geometria, e quindi può riguardarsi come il primo acquisto dell'Analisi infinitesimale.

3. – La polemica di Zenone d'Elea.

L'importanza della critica di PARMENIDE fu posta efficacemente in evidenza del suo discepolo ZENONE (che era di venticinque anni più giovane del suo maestro).

L'opera di ZENONE fu tutta dedicata a difendere la tesi del suo maestro circa l'unità o continuità dell'esistente (ἓν εἶναι τὸ πᾶν) contro i sostenitori della tesi della pluralità (πολλά ἐστι τὰ ὄντα), derivata dall'ipotesi monadica dei Pitagorici. La sua lotta fu di un'efficacia straordinaria; i suoi argomenti fanno testimonianza di un'abilità dialettica di primo ordine, degna veramente di colui che ARISTOTELE considerava come inventore della logica. Questi argomenti, che per molto tempo furono stranamente

fraintesi e calunniati come paralogismi, hanno riacquistato finalmente il loro significato e rientrano ora fra i documenti più importanti per la storia delle matematiche (e ciò per merito del TANNERY, la cui geniale ricostruzione fu nuovamente propugnata e in alcuni punti perfezionata dall'ENRIQUES).

Gli argomenti di ZENONE appariscono come riduzioni all'assurdo dell'ipotesi pitagorica e costituiscono un formidabile dilemma, che stringe l'avversario senza possibilità di scampo.

Le premesse dell'argomentazione zenonica bisogna ricercarle nella teoria parmenidea, in proposizioni come queste: ciò che veramente esiste deve essere anche pensabile senza contraddizione, e ciò che si pensa deve pur corrispondere a qualcosa che esiste. Il non-ente, il vuoto, il nulla non può esistere.

Fr. 5 (DIELS, pag. 152): chè la stessa cosa è pensare ed essere.

Fr. 6 (pag. 153): il niente non è possibile.

Fr. 8 (pag. 156): E esso [l'esistente, lo spazio] neppure è diviso, perchè è tutto omogeneo; nè vi è qualche cosa più forte che possa impedire la sua connessione, nè qualche cosa più debole; è tutto riempito di cose esistenti. Perciò è tutto continuo: chè un ente è strettamente vicino a un altro ente.

Riassumiamo ora brevemente i famosi argomenti, e in primo luogo quelli diretti in generale a mettere in luce le contraddizioni racchiuse nell'ipotesi della pluralità.

1º Argomentando per assurdo, ZENONE fa vedere come ammettendo le grandezze geometriche costituite di elementi indivisibili ed estesi, queste grandezze dovrebbero essere nello stesso tempo « piccole e grandi: piccole fino a non aver grandezza alcuna, grandi fino ad essere infinite ».

Infatti, se una cosa è indivisibile, non ha parti, e quindi è priva di grandezza. Allora, se essa si aggiunge a un'altra cosa, non rende questa più grande; se si toglie da un'altra cosa, non rende questa più piccola. Perciò essa non appartiene agli enti, è nulla.

Dunque una grandezza composta di elementi indivisibili, comunque grande sia il loro numero, non può essere che una grandezza nulla.

Ne segue che se una grandezza (sensibile) è composta di elementi, è necessario che questi abbiano anch'essi una certa grandezza.

Ma nell'ipotesi della pluralità ciascuno degli elementi che compongono una data grandezza deve essere separato da ciascuno degli altri mediante qualche

altro elemento. (Il vuoto non esiste). Così tra questo elemento e il suo precedente vi deve essere qualche altro elemento; e così indefinitamente.

Quindi ogni grandezza sarebbe composta di un numero infinito di elementi, e quindi dovrebbe essere infinitamente grande.

Dunque l'ipotesi della pluralità è assurda.

SIMPLICIO (in DIELS, pag. 174): Nel suo scritto, che contiene molti ragionamenti, ZENONE dimostra in ciascuno di essi che chi sostiene esservi pluralità, dice cose contraddittorie. Uno di tali ragionamenti è questo, in cui dimostra che se le cose sono pluralità, esse sono anche grandi e piccole; grandi sino ad essere infinitamente grandi, e tanto piccole da non aver grandezza alcuna. A tale scopo egli dimostra che ciò che non ha nè grandezza, nè spessore, nè volume, è nulla.

« Infatti – dice – se si aggiunge a un altro ente non lo rende per nulla più grande. Poichè, non avendo grandezza alcuna, se si aggiunge a un'altra cosa, questa non può acquistar nulla in grandezza. E così, manifestamente, ciò che si è aggiunto sarebbe nulla. Se poi, sottraendolo l'altra cosa non diventerà per nulla più piccola, nè di nuovo aggiungendolo diventerà più grande, è chiaro che ciò che si è aggiunto, come anche ciò che si è tolto, era nulla ».

ARISTOTELE, *Metaph.*, II, 4: 1001 *b* 7: Inoltre se la stessa unità è indivisibile, secondo l'assioma di Zenone sarebbe nulla. Essa infatti nè se si aggiunge, nè se si toglie rende maggiore o minore una cosa particolare, ecc. ecc.

SIMPLICIO (DIELS, pag. 173): Avendo prima dimostrato che se l'ente non ha grandezza non può esistere, aggiunse:

« Se esiste, è necessario che ciascuna delle sue parti abbia una certa grandezza e spessore, e che ognuna di esse abbia una certa distanza da un'altra. E lo stesso si può dire di quella che la precede. E questa che la precede avrà essa stessa una certa grandezza e sarà preceduta da qualche altra parte. Ciò che si è detto una volta, si potrà sempre ripetere; chè nessuna di tali parti sarà l'ultima, e non vi sarà nessuna parte che non contenga altre parti. Cosicchè, se vi è pluralità, è necessario che le cose sieno piccole e grandi; piccole tanto da non aver grandezza alcuna, grandi tanto da essere infinite ».

2º La ipotesi della pluralità conduce a un'altra contraddizione, e cioè che una stessa cosa sarebbe insieme finita e infinita.

Infatti, dire che una grandezza è composta di elementi, significa ammettere implicitamente che il numero di questi è limitato, e che due elementi qualunque son separati da un certo intervallo. Ma anche questo è composto di altri elementi; dimodochè fra due elementi comunque vicini esistono altri elementi; e altri fra questi, e così in infinito. Quindi la stessa grandezza sarebbe composta anche di un numero infinito di elementi.

Dunque la stessa cosa sarebbe finita e infinita (limitata e illimitata).

Ma questo è assurdo. Dunque è assurda l'ipotesi della pluralità.

SIMPLICIO (DIELS, pag. 175): Infatti volendo nuovamente dimostrare che se vi è pluralità, le stesse cose sarebbero finite e infinite, ZENONE scrive testualmente così:

« Se vi è pluralità, è necessario che le cose siano tante quante sono, nè più nè meno. Se sono tante quante sono, esse devono essere finite [di numero].

« Ma se vi è pluralità, le cose sono infinite [di numero]; giacchè fra le singole cose ve ne sono sempre delle altre, e ancora altre fra queste. E perciò le cose sono infinite ».

E in questo modo dimostrò l'infinito secondo moltitudine, mediante la dicotomia.

Non sappiamo se l'abile dialettico, dopo la demolizione della tesi avversaria, abbia tentato la ricostruzione della teoria che doveva sostituirla. Ma questa del resto è già contenuta nella dottrina del suo maestro PARMENIDE e i suoi stessi argomenti la suggeriscono.

Se è assurda l'ipotesi della pluralità, è necessario ammettere la tesi della *continuità* dello spazio e delle grandezze geometriche. Se un elemento ultimo *indivi-*

sibile delle grandezze è inconcepibile, bisogna ritenere che ogni grandezza ammette una divisibilità senza limiti, una *divisibilità infinita*.

L'intento principale della potente argomentazione può dirsi che consista nella negazione della estensione attribuita al « punto ». Così ARISTOTELE e i Commentatori la riassumono dicendo che ZENONE riteneva il punto « non appartenere agli enti », nel senso che negava essere il punto una cosa sensibile, realmente esistente. Nel suo pensiero il punto doveva considerarsi come un ente privo di ogni grandezza, come una cosa puramente intelligibile. E questo non è che una conferma della critica parmenidea.

Qui però è da osservare che non sarebbe esatto affermare che egli intendesse di mostrare che il punto è « nulla ». Piuttosto è da ritenere che egli riconobbe chiaramente come, proseguendo la divisione di una grandezza, le parti che si ottengono sono sempre più piccole, e che non vi è un termine alla diminuzione. Quindi il punto doveva apparire come una cosa più piccola di qualsiasi altra cosa piccola ad arbitrio, e cioè come *infinitamente piccolo*. Si capisce così il valore dell'osservazione che aggiunse SIMPLICIO alla fine del secondo degli argomenti su riportati: « e in

questo modo mostrò l'infinito secondo moltitudine mediante la dicotomia », che indica uno dei modi legittimi di considerare una grandezza come somma di un numero infinito di elementi. Ancora una volta possiamo dunque rilevare come dalla critica dei principii della geometria nasce il concetto dell'« infinitesimo » e la prima idea del procedimento infinitesimale.

Alla stessa polemica contro la pluralità si possono riattaccare due degli argomenti di ZENONE sul movimento, i quali con esempi più concreti e in una forma un po' più paradossale hanno lo scopo di manifestare nuove contraddizioni in cui cadono i sostenitori della tesi combattuta. Di più, essi hanno un significato matematico preciso, che conviene mettere in evidenza.

1º Un punto moventesi, per esempio, sopra una retta non può passare da un punto A della stessa retta a un altro punto B, perchè dovrebbe passare prima per il punto medio C del segmento $A B$, e poi per il punto medio del segmento $C B$, e così all'infinito.

2º Achille – velocissimo – non può raggiungere nella corsa la tartaruga – lentissima – sol che le dia

un certo vantaggio. Infatti, se si pone Achille in *A* e la tartaruga in *T*, e si ammette che Achille corra, per esempio, con una velocità *n* volte più grande, egli dovrà prima andare da *A* in *T*, e frattanto la tartaruga andrà da *T* ad un punto *T'* (posto ad una distanza da *T* uguale all'n^{ma} parte di *AT*), e poi da *T* a *T' T''*, mentre la tartaruga sarà passata già ad un altro punto T''; e così all'infinito.

ARISTOTELE, *Phys.*, VI, 9, 239 *b* 9: « Quattro sono gli argomenti di Zenone riguardanti il movimento, la cui interpretazione offre delle difficoltà. Il primo è quello riguardante la impossibilità del movimento per il fatto che il mobile dovrebbe raggiungere la metà prima di raggiungere la fine ».

« Il secondo (argomento) è il cosidetto *Achille*, e consiste in questo, che il più tardo corridore non sarà mai raggiunto nella corsa dal più veloce; giacchè sarebbe necessario che colui che insegue arrivi prima al punto donde partì quello che fugge, di modo che il più lento avrà sempre necessariamente qualche vantaggio. Anche questo argomento consiste nella dicotomia; ma ha di speciale che non divide la grandezza data in due parti uguali ».

In questi argomenti non si vuol negare la possibilità del movimento, ma la sua inconciliabilità con

l'ipotesi monadica dello spazio. In tale ipotesi, infatti, per andare da un punto A a un punto B bisognerebbe attraversare infiniti altri punti, e cioè infiniti segmenti, ciascuno dei quali avrebbe una lunghezza, sia pur minima, ma sempre finita. Quindi per andare da A a B bisognerebbe percorrere un numero infinito di segmenti *finiti*, e cioè una lunghezza *infinita*. Lo stesso dovrebbe fare Achille per raggiungere la tartaruga.

Così, dunque, appare impossibile il moto nella concezione monadica dello spazio, e il motivo di questa impossibilità sembra essere riposto da Zenone nel duplice fatto:

1º che in quella concezione ogni segmento dovrebbe essere una somma di un numero infinito di altri segmenti;

2º e che ognuno di questi segmenti dovrebbe avere una lunghezza finita, maggiore sempre di un minimo (delle dimensioni cioè del *punto*, o dell'intervallo fra due punti contigui).

Attraverso la forma negativa, con cui è giunta a noi la critica zenoniana, non è difficile ricavare il suo valore positivo. Traspare già in essa un principio che assumerà ben presto un'importanza fondamentale

nell'ulteriore elaborazione della scienza matematica; essa infatti conduce ad ammettere che:

Un segmento si può decomporre in un numero infinito di parti, dividendolo (per esempio) successivamente in 2, in 4,... parti uguali; queste parti diminuiscono continuamente fino a diventare più piccole di qualsiasi altro segmento, piccolo a piacere.

Ora è questo principio che, come si vedrà in seguito, ha servito ad EUDOSSO per fondare la sua teoria dei rapporti incommensurabili, superando con questa l'ostacolo dell'incommensurabilità, che minacciò i progressi della geometria pitagorica, e per stabilire il metodo d'esaustione. Onde non è esagerato affermare che la critica di ZENONE prelude ai metodi dell'Analisi infinitesimale.

Si deve inoltre osservare che i due argomenti precedenti pongono il problema della somma di una progressione geometrica infinita. E precisamente il primo ricorda la possibilità di decomporre una grandezza in un numero infinito di parti, mediante la dicotomia; in parti cioè corrispondenti ai termini della serie

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$$

Il secondo conduce invece a una progressione geometrica qualsiasi

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3} + \dots ;$$

e indica perciò come in quell'epoca si sapesse già calcolare la somma di una tale serie. Anzi riteniamo (con lo ZEUTHEN) che la soluzione di questo problema sia un altro effetto della critica eleatica, e che essa possa attribuirsi o allo stesso ZENONE, o a qualche suo avversario (1).

3. – Le ricerche infinitesimali di Democrito d'Abdera.

DEMOCRITO era giovane quando Zenone cominciava a diventar vecchio; e a lui spetta il merito di aver raccolto le idee dell'Eleate e averne tentate le prime applicazioni.

DEMOCRITO (insieme con LEUCIPPO) fu il fondatore della teoria atomistica; ma il suo atomismo voleva semplicemente offrire un modello dei fenomeni fisici,

(1) H. G. ZEUTHEN, *Histoire des Mathématiques dans l'Antiquité*, pag. 54.

e non contraddiceva al concetto razionale del punto geometrico inesteso. Egli non ammetteva le *linee indivisibili* (come SENOCRATE). I suoi atomi erano parti di materia compatta, impenetrabile, e in questo senso indivisibili; potevano essere più o meno piccoli, ma non erano certo infinitamente piccoli, e perciò non ponevano nessun limite alla divisibilità dei solidi geometrici. Pertanto la professione della dottrina atomistica non gli impediva di seguire in geometria le idee della scuola eleatica [1].

Dei suoi studi geometrici sono giunte a noi scarse notizie; PROCLO trascura perfino di nominarlo tra i matematici preeuclidei. Pure non v'è dubbio che DEMOCRITO debba fra questi occupare un posto di primissimo ordine. Si occupò infatti ampiamente di matematica; scrisse libri sulla geometria e sull'aritmetica (i titoli ne furon trasmessi da TRASILLO), e la

[1] Cfr. DIELS, op. cit., *Demokritos*, II, p. 24, 5:
« [EPICURO] riteneva che tutti gli atomi fossero piccolissimi e per questo non percepibili con i sensi, DEMOCRITO invece che vi fossero anche degli atomi molto grandi. Ma ambedue dicono che vi sono gli atomi, così chiamati per la loro indivisibile solidità ».

V. anche HEATH, *A history of Greek Math.*, I, 181; ENRIQUES, *Le venerabili proprietà della materia*, *L'evoluzione delle idee geometriche*, ecc.

sua opera non fu probabilmente senza influenza sullo stesso EUCLIDE (1). Con particolar cura si occupò di questioni che rappresentano uno sviluppo dei concetti infinitesimali: della teoria degli incommensurabili e della cubatura dei solidi. Su quest'ultimo argomento abbiamo testimonianze più precise, che ora esamineremo.

ARCHIMEDE nel *Metodo* (v. più avanti, pag. 107) attesta che a DEMOCRITO risale l'invenzione dei due teoremi circa il volume della piramide e del cono; cioè che:

> la piramide è la terza parte del prisma e il cono la terza parte del cilindro, aventi rispettivamente la stessa base e altezza uguale della piramide o del cono.

Ma non dice come li scoprì; aggiunge invece che li enunciò « senza dimostrazione », ossia senza una dimostrazione dotata di tutto il rigore scientifico che allora si richiedeva. Giacchè è naturale supporre che l'Abderita, pubblicando la sua scoperta, l'avesse

(1) Si vegga l'elenco delle opere di DEMOCRITO in DIELS, op. cit.; in particolare II, pag. 62. V. anche ENRIQUES, *Per la storia della logica*, pag. 30 sg. e l'articolo già citato, in *Questioni riguardanti le Mat. elem.*, I, pag. 20.

accompagnata almeno da un tentativo di dimostrazione.

A tale proposito non è privo di interesse un passo di PLUTARCO, dal quale si possono rilevare alcune delle idee che guidarono alla scoperta. Esso riferisce una questione che si presentò a DEMOCRITO, evidentemente durante le sue ricerche relative al volume del cono, ed è il seguente:

(*De comm. not. adversus Stoicos*, 39, 1079 E): « Se si taglia un cono con un piano parallelo alla base « [e s'intende anche: infinitamente vicino alla base], « che cosa si deve pensare delle superficie delle sezioni, « che esse sono uguali o disuguali?

« Giacchè se fossero disuguali farebbero il cono « irregolare, quasi avesse molti ripiani, come una sca« linata, e molte scabrosità; se invece fossero uguali, « le sezioni stesse sarebbero uguali e potrebbe sem« brare che il cono avesse la stessa proprietà del ci« lindro, cioè di esser formato di circoli uguali e non « disuguali; il che è oltremodo assurdo ».

L'essersi proposto una tale questione, e più ancora la frase, che si riferisce al cilindro: « formato di circoli uguali e non disuguali » (ἐξ ἴσων συγκείμενος καὶ οὐκ ἀνίσων κύκλων) può convalidare l'opinione

che DEMOCRITO concepisse un solido come somma di un numero infinito di piani paralleli, o anche di strati indefinitamente sottili e indefinitamente vicini l'uno all'altro, anticipando in qualche modo l'idea, di cui approfittò, come vedremo, così felicemente ARCHIMEDE nelle ricerche preliminari alle sue importantissime scoperte.

PLUTARCO non dice come DEMOCRITO abbia risolto il dubbio. Ma è molto probabile che avesse osservato come diminuendo la distanza fra due piani secanti consecutivi, anche la differenza fra le due sezioni corrispondenti potesse diventare tanto piccola quanto si voleva. Questa osservazione lo avrebbe allora indotto a considerare la piramide (o il cono) come somma di una serie di prismi (o di cilindri) decrescenti.

In conseguenza di ciò è possibile fare qualche congettura sulla via che condusse alla scoperta.

DEMOCRITO avrebbe in primo luogo osservato (secondo HEATH) che in due piramidi di altezza e base uguali, due sezioni fatte rispettivamente alla stessa altezza, sono uguali; e quindi dedusse che anche le due proposte piramidi sono equivalenti, come somma di uno stesso numero di sezioni parallele uguali. Sta-

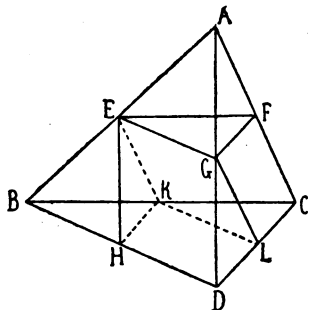
bilito questo criterio d'equivalenza (una particolare anticipazione del « metodo degli indivisibili » quale vedremo usato da ARCHIMEDE e fu svolto poi da CAVALIERI), gli era facile riconoscere che ogni prisma triangolare si può dividere in tre piramidi equivalenti; e da questo segue subito il teorema in questione [1].

Ma ci sembra che se DEMOCRITO per annunziare la sua scoperta si fosse servito soltanto di questo ragionamento, si sarebbe troppo ingenuamente esposto ad esser criticato con le stesse arti della dialettica zenonica. Lo stesso riferimento di PLUTARCO ci rappresenta il nostro geometra insoddisfatto di tale ragionamento; il quale, se pure poteva fornire una prova in qualche modo intuitiva del teorema, si prestava a tutte le obbiezioni derivanti da un uso dell'infinito non circondato di prudenti cautele, quando quel concetto non era ancora entrato nelle abitudini mentali di tutti i matematici. Non è perciò improbabile che abbia cercato di convalidare in altro modo la sua scoperta. Forse non saremo molto lontani dal vero supponendo (come sug-

[1] *The thirteen books of Euclid's Elements*, III, pag. 368; e *Archimedes*, pag. 414.

gerisce anche ENRIQUES) che egli abbia eseguito l'effettivo calcolo del volume mediante lo stesso procedimento, che più tardi EUDOSSO rese rigoroso e che è stato conservato da EUCLIDE (*Elementi*, XII, 4). Esso deriva facilmente dalla precedente considerazione e fa uso della divisione per dicotomia, che gli argomenti di ZENONE avevano reso famigliare.

Ciò posto, potremo così ricostruire il ragionamento democriteo:

Sia la piramide triangolare *ABCD:* per i punti di mezzo *E*, *F*, *G* degli spigoli laterali si conduca un piano, il quale risulterà parallelo alla base; per la retta *EG* si conduca un piano parallelo allo spigolo *AC* e un altro per il punto *E* parallelo alla faccia *ACD*.

In tal modo la piramide resterà divisa nelle due piramidi *A* (*EFG*), *B* (*EKH*), e nei due prismi (*EGF*, *KLC*), (*EHK*, *GDL*).

I due prismi sono uguali (EUCLIDE, *Elementi*, XI, 39).

Si dimostra facilmente, considerando per esempio il prisma (*EGF*, *KLC*), che la base *KLC* è la quarta

parte della base *BDC* della piramide e che l'altezza corrispondente è metà dell'altezza della piramide relativa alla stessa base *BDC;* dunque i due prismi insieme sono $\frac{1}{4}$ del prisma *P* che ha la stessa base e la stessa altezza della piramide.

Se le altre due piramidi si tagliano allo stesso modo si avranno altri quattro prismi con le basi e le altezze uguali rispettivamente alla quarta parte e alla metà di quelle dei due prismi precedenti; equivalenti perciò a $\frac{1}{16}$ dal prisma *P.*

Un'ulteriore divisione dà luogo ad altri otto prismi, equivalenti ad $\frac{1}{64}$ di *P;* ecc.

Poichè la divisione si può proseguire indefinitamente, e i prismi ottenuti nelle successive divisioni diventano sempre più piccoli, sino a diventare *infinitamente piccoli*, si può immaginare la piramide come somma di un numero infinito di solidi, formati rispettivamente di

$$2,\ 4,\ 8,\ \ldots\ldots \text{ prismi,}$$

ciascuno uguale a

$$\frac{1}{4},\ \frac{1}{16},\ \frac{1}{64},\ldots$$

del prisma che ha la stessa base e la stessa altezza della piramide.

Tale procedimento dà per il volume della piramide l'espressione

$$V = P\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \ldots\right).$$

Ora

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \ \ldots = \frac{1}{3},$$

e questo poteva saperlo anche DEMOCRITO; dunque

$$V = \frac{1}{3} P.$$

Il passaggio ad una piramide poligonale qualsiasi non presentava difficoltà speciali.

Per avere il volume del cono, DEMOCRITO forse, immaginando un cilindro ed un cono circoscritti rispettivamente ad un prisma e ad una piramide della stessa base e della stessa altezza, osservò che, aumentando continuamente i lati del poligono base, il prisma e la piramide possono differire dal cilindro e dal cono di tanto poco quanto si vuole. Onde concluse che fra cilindro e cono dovesse sussistere la stessa relazione che fra prisma e piramide.

Tutto il ragionamento precedente è, come si vede, un embrionale procedimento infinitesimale, consistente nell'uso di serie convergenti. Esso, come abbiamo osservato, era possibile per chi era in possesso delle idee che presiedevano all'argomentazione zenonica. Tuttavia allora costituiva una novità; l'uso della serie infinita non poteva non presentare difficoltà concettuali, capaci di preoccupare lo stesso DEMOCRITO. D'altra parte, i ragionamenti di ZENONE, mentre aprivano alle speculazioni di matematici il mondo dell'infinito, ne prospettavano con vigore tutte le incognite e anzichè incoraggiarne l'uso nelle questioni geometriche, consigliavano le più prudenti cautele. DEMOCRITO tentò di vincere le prime resistenze, e il suo tentativo merita bene la lode che gli rivolge ARCHIMEDE: è la lode che si deve a chi tenta vie nuove, quando le antiche non conducono alla mèta. Questo è il caso di DEMOCRITO; se egli ricorse all'idea dell'infinito per giustificare la sua scoperta, è perchè aveva forse visto che non poteva farne a meno. Non è dunque senza importanza il fatto che la prima volta che nella storia della scienza si parla della cubatura della piramide e del cono, essa si trovi già collegata alle questioni infinitesimali.

5. – Le quadrature del circolo di Antifonte e di Brisone.

Qualunque sia stata l'opera di DEMOCRITO e l'autorità delle sue ricerche, il metodo infinitesimale rimaneva ancora sprovvisto d'una solida base logica, che ne assicurasse i risultati. Oltre a ciò, a svalorizzare l'iniziativa del filosofo d'Abdera contribuì l'opera perniciosa di alcuni sofisti, che ritentarono di richiamare in vita l'empirismo contro il razionalismo della scuola d'Elea.

Ispirata da preconcetti empirici è la quadratura del cerchio tentata da ANTIFONTE, sofista, indovino e scrittore di versi, contemporaneo di SOCRATE.

Questi, com'è noto, cercò di risolvere il problema, che era divenuto celebre per la sua difficoltà, inscrivendo nel cerchio successivamente poligoni regolari di 2, 4, 8,... lati, « e credeva che così facendo continuamente la superficie del cerchio finisse con l'esaurirsi (φετό ποτε δαπανωμένου τοῦ ἐπιπέδου) e che « in questo modo si potesse inscrivere un poligono, i « cui lati per la loro piccolezza avrebbero dovuto coincidere con la periferia del cerchio. Ora per ogni « poligono possiamo costruire un quadrato uguale,

« come abbiamo imparato negli *Elementi* [EUCLIDE,
« II, 14]; così per l'ipotesi che il poligono sia uguale al
« cerchio con cui coincide, saremo in grado di costruire
« anche un quadrato uguale al cerchio ».

Contro questo ragionamento ARISTOTELE si limita ad osservare che è falso e che non appartiene al geometra il confutarlo, perchè non è fondato sui principii. SIMPLICIO più dettagliatamente spiega che esso si oppone:

a) al teorema che dice essere impossibile che una retta incontri il cerchio in più di due punti, e quindi che un segmento di retta possa coincidere con un arco circolare;

b) al principio che afferma la infinita divisibilità delle grandezze.

Ne segue che la differenza fra il cerchio e il poligono inscritto, se diminuisce con l'aumentare i lati del poligono, non può diventare nulla anche se il numero dei lati diventa grandissimo. E così è assurdo che possa ottenersi un poligono inscritto in un cerchio con un numero tanto grande di lati da confondersi con il cerchio stesso [1].

---

[1] ARISTOTELES, *Phys.*, I, 1, 185 a 14; SIMPLICIUS, *in Phys.*, ed. Diels, p. 54, 12; THEMISTIUS, *in Phys.*, ed. Schenkl, pag. 4, 2. Cfr. G.

Fondamentalmente errata come la precedente è la quadratura di BRISONE, contemporaneo di ANTIFONTE.

BRISONE considerò insieme con il poligono inscritto anche il poligono circoscritto, e pensò che raddoppiando il numero dei lati di ambedue i poligoni e continuando tale operazione per un certo numero di volte si riesca ad ottenere due poligoni, la cui area differisca di tanto poco che, descrivendo un poligono di area media fra le due aree, questo possa essere uguale al cerchio, che è pure intermedio fra i poligoni inscritti e circoscritti.

Qualcuno vuol vedere in questo ragionamento qualche progresso rispetto a quello di ANTIFONTE, in quanto che ammette che non è possibile *esaurire* il cerchio con un poligono inscritto di un numero grandissimo di lati, e ricorre all'uso dei poligoni circoscritti, affermando pure che il cerchio è maggiore di ogni poligono inscritto e minore di ogni poligono circoscritto.

LORIA, *Le scienze esatte nell'antica Grecia*, Milano (Hoepli), 1914, pag. 94. Osserviamo che LORIA e HEATH (*Hist. of Greek Math.*, I, 184) dànno del tentativo di ANTIFONTE giudizio più favorevole; e così pure del tentativo di BRISONE.

Ma la sua conclusione è ugualmente sofistica e per lo stesso motivo. Giacchè è da supporsi che BRISONE credeva di poter giungere, dopo un numero finito di operazioni, a una coppia di poligoni tale che il poligono avente un'area media fra le aree dei due poligoni fosse uguale al cerchio; evidentemente non tenendo conto del fatto che la costruzione di poligoni inscritti e circoscritti si poteva continuare indefinitamente, oltre la coppia da lui raggiunta ([1]).

Non credo che i ragionamenti di ANTIFONTE e di BRISONE segnino un progresso e neppure che l'idea di approssimare il cerchio con poligoni inscritti e circoscritti debba a loro la sua origine. Quei ragionamenti rappresentano piuttosto una deturpazione o una incomprensione di metodi già tentati da altri geometri; giustamente furono considerati come sofismi.

Ricordiamo che il problema della quadratura del cerchio fu già tentato da IPPOCRATE da Chio (assai probabilmente anteriore ai due di cui parliamo) e con molto maggiore serietà.

([1]) ARISTOTELES, *An. post.* I, 9, 75 *b* 40; ALEXANDER, *in Soph. El.*, ed. Wallies, pag. 90, 10; THEMISTIUS, *in An. post.*, ed. Wallies, pag. 19; PHILOPONUS, *in An. port.*, ed. Wallies, pag. 111 sq. Cfr. LORIA, op. cit., pag. 96; HEATH, op. cit., I, 223-5.

Nel tentativo di Ippocrate (cfr. frammento conservato da Simplicio nel *Commento alla Fisica di Aristotele*) si nota già la considerazione dei poligoni inscritti, e non è improbabile che o egli stesso o altri della sua epoca avessero introdotto anche la considerazione dei poligoni circoscritti. Ippocrate adopera inoltre la proporzionalità dei cerchi ai quadrati dei loro diametri, e pare che egli ne abbia anche tentata la dimostrazione, preludendo in qualche modo a quella che ne diede poi, come vedremo, Eudosso da Cnido. Onde è lecito concludere che, prima dei due nominati sofisti, geometri di ben noto valore abbiano intuito la vera natura di questo problema, fondandone la soluzione sulle serie infinite, cui dànno luogo i poligoni inscritti o circoscritti.

Pur tuttavia il fatto che i sopra detti sofismi furono possibili ed ebbero una certa popolarità sta a dimostrare le difficoltà cui andava incontro l'uso del concetto d'infinitesimo, qualora non fosse fatto con il dovuto rigore. Donde la necessità di tutelare il sicuro progresso della scienza mediante una sistemazione logica dei metodi di ricerca e mediante l'instituzione di un metodo rigoroso di dimostrazione, che servisse insieme a garantire e a controllare i risultati delle investigazioni.

6. – Eudosso da Cnido e la sistemazione critica delle ricerche infinitesimali.

Indirizzata principalmente allo scopo su accennato fu l'attività dei matematici del IV secolo, tra i quali spicca gigantesca la figura di EUDOSSO da Cnido (1).

Ad EUDOSSO si attribuisce la sistemazione critica della teoria delle proporzioni, indipendente dalla commensurabilità delle grandezze (qual'è esposta nel V libro degli *Elementi* euclidei). A lui, secondo l'esplicita testimonianza di ARCHIMEDE, deve attribuirsi la prima dimostrazione rigorosa dei due teoremi sul volume del cono e della piramide, già enunciati da DEMOCRITO. A lui anche deve farsi risalire la dimostrazione del teorema sulla proporzionalità dei circoli con i quadrati dei loro diametri, scoperta da IPPOCRATE da Chio.

ARCHIMEDE stesso si compiace di esaltare il rigore delle dimostrazioni eudossiane, che dichiara essere simili alle sue, perchè si fondavano su principii non

---

(1) v. E. RUFINI, *Gli studi geometrici di Eudosso da Cnido*, in *Arch. di St. della Scienza*, diretto da A. Mieli, Roma, II, 1921, pag. 222-239.

diversi da quelli che egli stesso adoperava. Indubbiamente EUDOSSO è stato il più grande dei matematici pre-euclidei, colui che sommamente contribuì a stabilire i metodi rigorosi nella scienza, il vero precursore del sommo Siracusano. Ben a ragione egli si suole riguardare come l'autore di quel metodo di dimostrazione, mediante il quale l'antica matematica fu in grado di proseguire le ricerche infinitesimali e anticipare il nostro calcolo integrale; del cosidetto « metodo di esaustione ».

Sulla natura delle dimostrazioni eudossiane ARCHIMEDE ci fornisce le seguenti preziose informazioni nell'introduzione al trattato sulla *Quadratura della parabola* (*Archimedis Opera ommia*, II, pag. 264):

« Dimostro infatti che ogni segmento compreso
« fra una retta e una sezione di cono rettangolo
« [parabola] è uguale ai quattro terzi del triangolo che
« ha la stessa base e l'altezza uguale a quella del se-
« gmento, assumendo per la dimostrazione il lemma se-
« guente: " date due superficie disuguali, la diffe-
« renza di cui la maggiore supera la minore è tale
« che aggiunta ripetutamente a se stessa può supe-
« rare qualunque superficie preassegnata ". Di questo
« lemma si son serviti anche i geometri precedenti.

« Infatti che i circoli sono tra loro in ragione dupli-
« cata dei loro diametri (*come il quadrato dei loro*
« *diametri*) hanno dimostrato servendosi di questo
« stesso lemma, e che le sfere sono tra loro in ragione
« triplicata dei diametri (*come il cubo dei loro diame-*
« *tri*); e, inoltre, che ogni piramide è la terza parte
« del prisma avente la stessa base della piramide e al-
« tezza uguale, e che ogni cono è la terza parte del
« cilindro avente la stessa base del cono e altezza
« uguale, lo provavano mediante un lemma simile a
« quello già citato ».

Il lemma di cui è cenno nel passo precedente corrisponde al cosidetto *postulato di Archimede*. Ora tale postulato segue facilmente dalla proposizione che EUDOSSO pose a fondamento della sua teoria generale delle proporzioni e che è riportata nella def. 4 del libro V degli *Elementi* di EUCLIDE; ossia:

« Si dice che hanno tra loro un rapporto quelle
« grandezze che sono tali che una qualunque di esse
« moltiplicata può superare una qualunque delle
« altre ».

Da questa infatti si deduce che: viceversa, se due grandezze ammettono un rapporto (e l'ammettono certamente se sono omogenee, come due linee, due

superficie, due volumi), una di esse moltiplicata può superare l'altra.

Si potrebbe anche osservare che un'analoga affermazione era contenuta implicitamente negli argomenti di ZENONE (v. pag. 9); ma essa trovò la sua definitiva sistemazione nella teoria eudossiana. Perciò quello stesso postulato risale effettivamente ad EUDOSSO, se non nella forma adottata da ARCHIMEDE, in una forma certamente equivalente e poco dissimile.

Si possono meglio precisare le indicazioni di ARCHIMEDE esaminando le propp. 2, 7, 10 del libro XII degli *Elementi* euclidei, in cui sono esposte le dimostrazioni dei teoremi suddetti. Queste dimostrazioni procedono sopra uno schema comune e tutte fanno uso d'uno stesso principio, che è quello contenuto nella prop. 1 del libro X.

« Date due grandezze disuguali, se dalla maggiore « si sottrae una grandezza più grande della sua metà, « e da ciò che resta una grandezza più grande della « sua metà, e se questa operazione si ripete conti- « nuamente, resterà una certa grandezza che sarà « più piccola della grandezza minore assegnata ».

EUCLIDE osserva che lo stesso teorema vale « anche se le parti sottratte siano la metà ». Esso è dimo-

strato con un ragionamento molto semplice, che si riduce alle seguenti osservazioni:

Siano AB e C le due grandezze, di cui $AB > C$. Si divida AB successivamente per metà, e sia:

$$b_1 = \frac{1}{2} AB; \quad b_2 = \frac{1}{2^2} AB; \ . \ . \ . \ ; \quad b_n = \frac{1}{2^n} AB.$$

Si considerino poi corrispondentemente dei multipli di C; per esempio:
$c_1 = C$; $C_2 = 2\,C$; . . . . ; $C_n = 2^{n-1}\,C$; $C_{n+1} = 2^n C$, prendendo n tanto grande che risulti $2^n C > AB$; ciò che è sempre possibile « poichè C se viene moltiplicata può diventare maggiore di AB ».

Ora si ha successivamente:

$$b_1 < c_n = \frac{2^n C}{2} = 2^{n-1}\,C$$

$$b_2 < C_{n-1} = 2^{n-2}\,C; \ . \ . \ .; \ b_n < c_1 = C;$$

e quindi anche

$$AB - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^n}\right) AB <$$
$$< 2^n\,C - (1 + 2 + \ldots + 2^{n-1})\,C.$$

Ma la somma delle serie in parentesi del primo e secondo membro è rispettivamente

$$1 - \frac{1}{2^n}; \qquad 2^n - 1;$$

quindi

$$\frac{AB}{2^n} < C. \qquad\qquad c. d. d.$$

In questo teorema è dunque presupposta la conoscenza del *lemma di Archimede* di cui non è che una facile deduzione.

Tutto quel che si è detto induce a concludere che il lemma adoperato da EUDOSSO sia stato proprio la proposizione 1 del libro X, la quale a lui ugualmente dovrebbe quindi la sua origine.

La precedente conclusione dà luogo ad un'altra interessante osservazione. È evidente che per n sufficientemente grande essa è valida anche quando C sia piccolissima. Per n tendente all'infinito, secondo il nostro linguaggio, si ha

$$\lim_{n \to \infty} \frac{AB}{2^n} = 0;$$

e questo corrisponde al fatto, già messo in evidenza

da ZENONE, che nella divisione delle grandezze si può procedere tanto oltre da ottenere grandezze infinitamente piccole.

7. – Le dimostrazioni " per esaustione " di Eudosso.

Ora per dare un'idea del procedimento dimostrativo introdotto da EUDOSSO non sarà inutile riportare, brevemente riassunte con linguaggio moderno, le dimostrazioni dei già menzionati teoremi.

I. – Proporzionalità fra i cerchi e i loro diametri.

Premesso che:

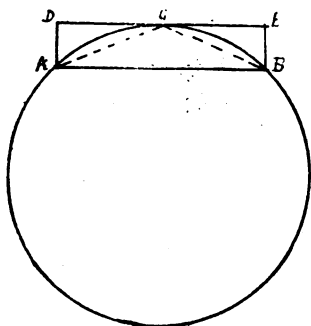
[XII. 1]. « Poligoni simili inscritti in circoli « stanno fra loro come i quadrati costruiti sui dia- « metri »,

si passa alla dimostrazione della proposizione:

[XII. 2]. « I circoli stanno fra loro come i qua- « drati costruiti sopra i diametri ».

1. Dato un circolo è sempre possibile inscrivere in esso un poligono con un numero sufficientemente grande di lati, tale che la differenza fra il circolo e il

poligono sia minore di un'altra superficie qualunque, piccola a piacere.

Infatti, si consideri un arco qualunque di cerchio sotteso da una corda AB. Per il punto di mezzo C dell'arco si conduca la tangente e dai punti A, B le perpendicolari alla tangente stessa. La figura $ABDE$ è un rettangolo; esso è maggiore del segmento ACB; e la metà di esso, il triangolo ACB, è maggiore della metà del segmento stesso.

Ciò posto, il quadrato inscritto nel cerchio risulta maggiore della metà del cerchio stesso; perchè esso è minore del cerchio ed è metà del quadrato circoscritto, che è maggiore del cerchio. Perciò la somma dei segmenti compresi fra la circonferenza e i lati del quadrato, cioè la differenza R_1 fra il quadrato e il cerchio, è minore della metà del cerchio.

Sui lati del quadrato si costruisca l'ottagono. La somma dei triangoli formati da due lati dell'ottagono e da un lato del quadrato è maggiore della metà della somma dei segmenti circoscritti ai trian-

goli stessi. E quindi sottraendo dal cerchio l'ottagono resta una differenza $R_2 < \frac{1}{2} R_1$.

Proseguendo per un certo numero di volte la costruzione di poligoni regolari con 4.2^2, 4.2^3;... lati, per la X. 1 si troverà un poligono che sottratto dal cerchio lascierà come differenza un'area più piccola di un'area qualunque data.

2. Siano X, X' le aree dei due circoli; d, d' i loro diametri.

Allora, se non è $X : X' = d^2 : d'^2$,
sarà

$$d^2 : d'^2 = X : S, \quad . \ . \ . \qquad [1]$$

dove S è una certa area maggiore o minore di X'.

In primo luogo, si supponga $S < X'$. Secondo quel che fu detto, si inscriva in X' un poligono, la cui differenza dal cerchio sia minore della differenza fra il cerchio stesso e S; cioè tale che

$$X' > (\text{poligono in } X') > S.$$

Si inscriva quindi in X un poligono simile a quello inscritto in X'. Allora:

$$\begin{aligned}(\text{poligono in } X) : (\text{poligono in } X') &= d^2 : d'^2 \\ &= X : S;\end{aligned}$$

e, permutando i medi:

$$(\text{poligono in } X) : X = (\text{poligono in } X') : S.$$

Ma

$$(\text{poligono in } X) < X$$

quindi anche

$$(\text{poligono in } X') < S.$$

Ma questo è assurdo, perchè per costruzione è

$$(\text{poligono in } X') > S.$$

Dunque è impossibile che sia S *minore* di X' come fu supposto.

In secondo luogo, si supponga $S > X'$. — Per la [1],

$$d'^2 : d^2 = S : X.$$

Se T è un'area tale che

$$S : X = X' : T,$$

sarà anche

$$d'^2 : d^2 = X' : T.$$

Ed essendo nella precedente $S > X'$ si dovrebbe anche avere $X > T$.

Ma ciò è impossibile, come si può dimostrare in una maniera analoga a quella adoperata nel primo caso.

Perciò non può essere S *maggiore di* X'.

Dunque deve essere $S = X'$,
e quindi

$$d^2 : d'^2 = X : X'. \qquad c. d. d.$$

II. – Volume della piramide.

1º [XII. 3]. « Ogni piramide che ha una base « triangolare si può dividere in due piramidi uguali e « simili tra loro, simili alla piramide intera e aventi « basi triangolari, e in due prismi uguali;

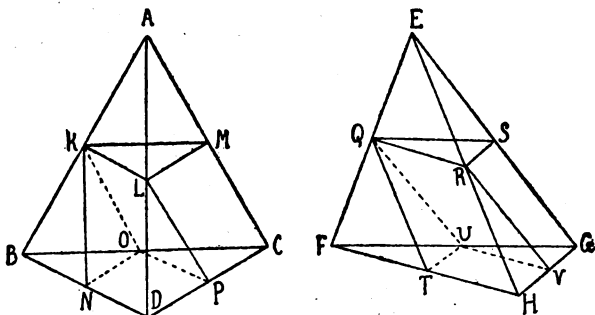
« e i due prismi sono più grandi delle metà del- « l'intera piramide ».

Per la dimostrazione della prima parte rimandiamo a quello che fu detto a pag. 26.

La seconda parte del teorema, che rappresenta l'elemento caratteristico delle nuove dimostrazioni, risulta facilmente osservando che (v. figura a pag. 26) la piramide $G\ (KLC)$ è manifestamente minore del prisma $(EGF,\ KLC)$, e così la piramide $A(EGF)$.

Evidentemente lo stesso vale per le altre due piramidi, e poi per le altre quattro piramidi, e così di

seguito, qualora si prosegua la divisione. Di maniera che, proseguendo la divisione un certo numero di volte, si avranno tanti prismi, la cui somma, pur mantenendosi sempre minore della piramide primitiva, ne può differire, per la X. I, di una quantità piccola ad arbitrio.

2º [XII. 4]. « Se sono date due piramidi della « stessa altezza con basi triangolari, ciascuna delle

« quali sia divisa in due piramidi uguali tra loro e « simili alla piramide intera e in due prismi uguali,

« allora, come la base di una piramide sta alla « base dell'altra, così tutti i prismi che sono in una « piramide stanno a tutti i prismi, uguali di numero, « che sono nell'altra piramide ».

Siano date le due piramidi $A(BCD)$, $E(FGH)$ soddisfacenti alle condizioni volute.

Con facili osservazioni si ricava che

$$\text{tr. } BDC : \text{tr. } OPC = \text{tr. } FHG : \text{tr. } UVG,$$

e, permutando i medi:

$$\text{tr. } BDC : \text{tr. } FHG = \text{tr. } OPC : UVG.$$

I prismi (KLM, OPC), (QRS, UVG) hanno la stessa altezza rispetto alle basi OPC, UVG, e perciò:

$$\begin{aligned} \text{prisma } (KLM, OPC) : \text{prisma } (QRS, UVG) &= \\ &= \text{tr. } OPC : \text{tr. } UVG \\ &= \text{tr. } BDC : \text{tr. } FHG. \end{aligned}$$

Lo stesso vale per gli altri due prismi, che sono uguali ai precedenti. Quindi:

[somma dei prismi in $A(BCD)$] : [somma dei prismi in $E(FGH)$] $=$ tr. BDC : tr. FHG.

Dividendo allo stesso modo le piramidi $A(KLM)$, $E(QRS)$, si avrà similmente:

[somma dei prismi in $A(KLM)$] : [somma dei prismi in $E(QRS)$] $=$ tr. KLM : tr. QRS
$=$ tr. BDC : tr. FHG.

Analogamente per il secondo paio di piramidi.

Si ripeta un numero qualunque di volte lo stesso procedimento. Riassumendo i risultati si avrà:

$$[\text{somma dei prismi in } A(BCD)] : [\text{somma dei prismi in } E(FGH)] = \text{tr. } BDC : \text{tr. } FHG.$$

3° [XII. 5]. « Le piramidi che hanno la stessa « altezza e basi triangolari stanno fra loro come le « basi ».

Sieno P, P' le due piramidi e B, B' le loro rispettive basi.

Se fosse

$$P : P' = B : B'$$

sarebbe

$$B : B' = P : V$$

con $V \gtrless]P'$.

In primo luogo, si supponga $V < P'$.

Si divida P' nel modo detto e si continui la divisione finchè la differenza fra P' e la somma dei prismi ottenuti sia *minore* che la differenza fra P' e V, di modo che

$$P' \geq (\text{prismi in } P') > V.$$

Si divida similmente P, lo stesso numero di volte,

Ora, per la XII. 4 e per l'ipotesi:

$$(\text{prismi in } P) : (\text{prismi in } P') = B : B'$$
$$= P : V,$$

e, permutando i medi:

$$(\text{prismi in } P) : P = (\text{prismi in } P') : V.$$

Ma

$$(\text{prismi in } P) < P,$$

e perciò

$$(\text{prismi in } P') < V.$$

Ma questo è assurdo, perchè per costruzione è

$$(\text{prismi in } P') > V.$$

Dunque è impossibile che sia $V < P$.

In secondo luogo, si supponga $V > P'$. — Posto

$$B' : B = V : P,$$

si può scegliere un certo solido U tale che

$$V : P = P' : U,$$

e quindi

$$B' : B = P' : U,$$

essendo, per la precedente relazione, $U < P$.

Ma questo è impossibile, come si può dimostrare con un ragionamento analogo a quello già fatto.

Dunque V non può essere nè maggiore nè minore di P'; cosicchè

$$V = P'.$$

Allora

$$B : B' = P : P'. \qquad c. d. d.$$

4° [XII. 6]. « Le piramidi che hanno la stessa al-« tezza e basi poligonali stanno fra loro come le « basi ».

Si dimostra facilmente, con il precedente, decomponendo le piramidi in somme di piramidi triangolari.

5° [XII. 7]. « Ogni prisma che ha una base trian-« golare si può dividere in tre piramidi uguali tra loro « con basi triangolari ».

Sono infatti piramidi che hanno la stessa altezza e basi uguali.

Segue che:

« ogni piramide è la terza parte del prisma che « ha la stessa base e altezza uguale ».

III. - Volume del cono.

[XII. 10]. « Ogni cono è la terza parte del cilin- « dro che ha la stessa base di esso e altezza uguale ».

1. Dato un cilindro è sempre possibile inscrivere in esso un prisma con un numero sufficientemente grande di faccie, tale che la differenza fra il cilindro e il prisma stesso sia minore di un'altra grandezza qualunque piccola a piacere.

Si supponga, infatti, nel cilindro inscritto un prisma quadrato; esso è maggiore della metà del cilindro (poichè è la metà del prisma quadrato circoscritto al cilindro stesso e maggiore di questo). Perciò il resto R_1 fra il cilindro e il prisma è minore della metà del cilindro.

Se si divide per metà in C l'arco sotteso dal lato del quadrato (v. figura a pag. 22) il triangolo ACB è maggiore della metà del segmento ACB; e quindi ogni prisma triangolare costruito sullo stesso triangolo e inscritto nel cilindro è maggiore della metà della porzione del cilindro che si eleva sul segmento ACB. Cosicchè sottraendo dal cilindro il prisma ottagono, rimane un resto R_2 minore della metà di R_1.

Proseguendo così ad inscrivere prismi che hanno per base poligoni di 4.2_2, 4.2_3, ... lati, si arriverà per la X. 1, ad un prisma tale che la differenza fra esso e il cilindro sia più piccola di un volume qualunque assegnato.

2. Similmente, dato un cono, è sempre possibile inscrivere in esso una piramide con un numero sufficientemente grande di faccie, tale che la differenza fra esso e il cono sia minore di un'altra grandezza qualunque piccola a piacere.

3. Ciò premesso, siano O, V rispettivamente i volumi del cilindro e del cono.

Se non fosse

$$O = 3V,$$

sarebbe

$$O \gtrless 3V.$$

In primo luogo, si supponga $O > 3V$.

Si inscrivano nel cilindro successivamente dei prismi, finchè si arrivi a un prisma P tale che la sua $O - 3V$; tale dal cilindro sia minore della differenza differenza cioè che

$$O > P > 3V.$$

Ma P è triplo della piramide che ha la stessa base e la stessa altezza, e tale piramide è minore di V, perciò anche

$$P < 3V.$$

Ma questo è assurdo, perchè per costruzione è

$$P > 3V.$$

Dunque non può essere $O > 3V$.

In secondo luogo, si supponga $O < 3V$, e quindi

$$V > \frac{1}{3} O.$$

Si inscrivano nel cono successivamente delle piramidi, finchè si arrivi a una piramide P' che differisca dal cono meno della differenza $V - \frac{1}{3} O$; tale cioè che

$$V > P' > \frac{1}{3} O.$$

Ora P' è un terzo del prisma che ha la stessa base e la stessa altezza; questo prisma è minore del cilindro; quindi

$$P' < \frac{1}{3} O.$$

Ma questo è assurdo, perchè per costruzione è

$$P' > \frac{1}{3} O.$$

Dunque non può essere

$$O > 3V.$$

Dunque deve essere

$$O = 3V. \qquad \textit{c. d. d.}$$

8. – **Osservazioni sul metodo di esaustione.**

Le dimostrazioni delle XII. 2, 5 e 10 procedono su uno schema comune, che serve di modello anche per le dimostrazioni di altre proposizioni dello stesso libro (come le

XII. 11: « I coni e i cilindri che sono della stessa « altezza stanno fra loro come le loro basi »;

XII. 12: « Coni e cilindri simili stanno fra « loro nel rapporto triplicato [come i cubi] dei dia- « metri delle loro basi »).

Questa coincidenza non può essere stata casuale, deve essere stata voluta dal loro Autore; essa mostra

come a ragione si sia voluto vedere in quelle dimostrazioni delineato un metodo di dimostrazione, che segue regole determinate e suppone certi principii, e precisamente il *metodo di dimostrazione per esaustione.*

Diciamo di più: l'uniformità delle dimostrazioni non può che derivare da un metodo uniforme di ricerca e di scoperta. Quantunque nella forma rigorosamente sintetica, le dimostrazioni stesse conservano le traccie di questo metodo. A base di esse si ritrova infatti un procedimento infinitesimale, che corrisponde all'odierno metodo delle *serie convergenti.*

Così nella XII. 2 il cerchio è rappresentato con la serie indefinitamente crescente dei poligoni regolari inscritti di $4, 4.2, 4.2^2$, ...lati. Ciascuno di questi poligoni rappresenta un valore approssimato per difetto del cerchio; e il difetto può farsi tanto piccolo quanto si vuole aumentando continuamente il numero dei lati del poligono stesso. La X. 1 assicurava la convergenza della serie; in tal modo il sofisma di ANTIFONTE veniva corretto da un'argomentazione rigorosa.

Si avevano così le condizioni per concludere che il *limite* della serie stessa, quando il numero dei lati divenisse *infinitamente grande*, era il cerchio.

Analoghe considerazioni valgono per il caso della piramide e del cono.

Ma le dimostrazioni di EUCLIDE (EUDOSSO) evitano questo passaggio al limite, ed escludono ogni diretta considerazione infinitesimale. Della convergenza della serie esse approfittano solo per affermare che si può inscrivere nel cerchio un poligono, la cui differenza del cerchio stesso sia *più piccola di qualunque altra grandezza assegnata.*

Il resto della dimostrazione non è che una *riduzione all'assurdo* della tesi contraria. La quale, per altro, non si ottiene che in base all'accennata possibilità di inscrivere un poligono che differisca dal cerchio di tanto poco quanto si vuole.

La riduzione all'assurdo si poteva evitare se fosse stato ammesso il concetto di *limite.* Ma la critica dei concetti infinitesimali non aveva ancora raggiunto quell'alto grado di sviluppo che consentiva di dare di esso una definizione chiara e precisa, atta ad evitare tutti gli equivoci. Perciò fu escluso come mezzo di dimostrazione, sebbene forse non si possa negare che sia stato presentito ed adoperato nelle ricerche, sia pure in una forma tutt'affatto semplice ed intuitiva.

Per meglio valutare la portata del metodo eudossiano di fronte ai metodi introdotti dalla critica moderna nel Calcolo infinitesimale aggiungeremo un'osservazione già fatta dall'ENRIQUES (*Sul procedimento di riduzione all'assurdo*).

Per i geometri greci era evidente che ogni figura aveva la sua area o il suo volume. Per dimostrare che l'area o il volume A di una certa figura è uguale ad una area o a un volume B, essi dimostravano che non poteva essere $A \gtrless B$, facendo vedere che qualunque differenza si supponesse tra A e B, questa doveva essere minore di qualsiasi grandezza arbitraria. La forma negativa che assumono queste dimostrazioni sembra imposta soltanto dall'esigenza di evitare il concetto dell'infinito: sebbene un più libero impiego di tale concetto sia un presupposto necessario delle ricerche preliminari tendenti a determinare la grandezza B.

Nella geometria moderna si premettcno invece delle proposizioni esistenziali basate sul *principio di continuità*, mediante il quale si dimostra che una certa serie di poligoni o di poliedri ammette un limite, il quale vien *definito* come l'area o il volume cercato. In queste dimostrazioni il ragionamento indiretto per assurdo viene evitato, ma solo in apparenza;

giacchè esso figura sempre come un presupposto della definizione adottata.

In sostanza nei procedimenti moderni e negli antichi ogni ragionamento sull'infinito o sull'infinitesimo viene ricondotto alla considerazione di un sistema di disuguaglianze. Il criterio filosofico che ispira gli uni e gli altri si può dire identico; ma bisogna riconoscere che i moderni prevalgono sugli antichi per una assai maggior larghezza e facilità di applicazione.

Per quanto riguarda i risultati contenuti nelle proposizioni di cui trattiamo, essi appaiono fondati sopra un principio che, in termini moderni, potremmo enunciare nel modo seguente:

Se gli elementi corrispondenti di due serie convergenti stanno fra loro in un rapporto costante, anche i limiti delle due serie stanno fra loro nello stesso rapporto (1).

Le XII. 1 e 2 contengono la verifica di questo principio per il caso dei poligoni inscritti in due cerchi dati; le XII. 3, 4 e 5 per il caso delle somme dei prismi che si ottengono nelle successive divisioni della

(1) H. G. Zeuthen, *Die Lehre von des Kegelschnitten im Altertum*, Kopenaghen, 1886, pag. 434.

piramide; le XII. 10 per il caso delle piramidi e dei prismi inscritti rispettivamente in un cono e in un cilindro della stessa base e della stessa altezza.

Si capisce come, data una dimostrazione generale di quel principio, si sarebbero potute dimostrare in una maniera semplice e diretta tutte le citate proposizioni.

Tutto questo fu già avvertito da LUCA VALERIO (1552-1618), il quale servendosi appunto di un principio identico a quello sopra indicato, ravvivò con un soffio di vita nuova la geometria degli antichi, preludendo alla moderna teoria dei limiti.

Credo utile riportare qui la prop. VI del libro II dell'opera *De centro gravitatis solidorum* (Roma 1604): « Si maior vel minor prima, ad una maiorem vel minorem secunda, minori excessu vel defectu quantacumque magnitudine proposita, nominatam habuerit proportionem; prima ad secundam eandem nominatam habuerit proportionem ». Cioè: « Se una grandezza (E) maggiore o minore di una prima grandezza (A) ha sempre un dato rapporto ($C:D$) con un'altra grandezza (F), la quale sia nello stesso tempo maggiore o minore di una seconda grandezza (B), e supposto che l'eccesso o il difetto possa essere minore di qualsiasi grandezza data; allora il rapporto fra la prima e la seconda ($A : B$) è uguale al rapporto dato ($C : D$) ».

In linguaggio più moderno potremmo enunciare la stessa proposizione nel modo seguente: Date le grandezze A, B costanti, e le variabili E, F tali che le differenze $E—A$ e $F—B$, oppure $A—E$ e $B—F$, siano contemporaneamente inferiori a una grandezza qualsiasi data piccola ad arbitrio, se è sempre

$$E : F = C : D \qquad (C : D \text{ costante})$$

sarà anche

$$A : B = C : D.$$

In altri termini, se

$$\lim E = A \quad \text{e} \quad \lim F = B$$

e se è sempre

$$E : F = C : D$$

sarà anche

$$\lim E : \lim F = C : D.$$

Ma l'analisi dei Greci non raggiunse mai un grado così elevato. Ciò aumentava non poco le difficoltà delle loro ricerche, in quanto che per ogni caso si richiedeva una dimostrazione speciale. Il metodo di esaustione diminuiva solo in parte le difficoltà. In compenso rimane ad esso il merito di aver legittimato i risultati delle prime ricerche infinitesimali, quando era ancora imperfetta la critica dei concetti fonda-

mentali che le ispirarono. La logica rigorosa delle sue dimostrazioni contribuì senza dubbio a consolidare la fiducia nel valore di questo genere di ricerche, sottraendole alle controversie e agli equivoci di avversari e di cattivi intenditori. Nè può dirsi che ad esso mancasse la generalità; vedremo, parlando di ARCHIMEDE, come esso possedesse virtù sufficienti per seguire i più alti sviluppi, di cui fu capace l'analisi degli Antichi.

9. – Infinito ed infinitesimo secondo Aristotele.

Mentre si consolidavano le applicazioni, si venivano formando le basi d'una critica dei principii e dei concetti, che si ricollegano all'Analisi infinitesimale.

Accenniamo in primo luogo al *principio di continuità*, il quale, rigorosamente affermato da ZENONE, aveva trovato una formulazione precisa per merito di EUDOSSO nella proposizione euclidea X, I.

La continuità delle grandezze geometriche, com'è noto, fu strenuamente difesa da ARISTOTELE, al pari della loro divisibilità infinita, contro i sostenitori della *linee indivisibili* (¹).

(¹) Secondo ARISTOTELE la linea è una grandezza continua, e come tale sempre divisibile in parti sempre divisibili; v., per

ARISTOTELE accetta pienamente la tesi eleatica sul concetto razionale degli enti geometrici e si accosta palesemente alle concezioni infinitesimali. Fatto questo assai importante, non solo perchè l'appoggio dato a tali idee dal sommo filosofo ne accresceva notevolmente il prestigio, ma anche perchè sono sintomo di un'accoglienza favorevole che ad essa venne fatta oltre che dagli ambienti matematici, anche da quelli filosofici.

Particolarmente interessanti ci sembrano alcune osservazioni che si leggono nel libro III della *Fisica*, dove ARISTOTELE tratta la questione dell'infinito, per stabilire in che modo possa ammettersi l'esistenza di grandezze infinite (1).

Ricordiamo anzitutto la distinzione caratteristica che egli fa tra ciò che è *infinito in atto* (infinito at-

esempio *Metaphys.*, IV, 13, 1020 a 11; IV, 6, 1016 *b* 24 sg.; *de Coelo*, I, 1, 268 a 7. Non è possibile che la linea possa esser composta di punti, nè di parti indivisibili (come di piccolissime linee indivisibili) *Phys.*, VI, 2, 233 *b* 15; 6, 237 *b* 8; IV, 12, 220 e 30; *de Coelo*, I, 5, 271 *b* 9. Questo sostiene egli non solo contro SENOCRATE, come nello scritto giovanile *Sulle linee indivisibili*, ma anche contro PLATONE, cfr. *Metaphys.*, I, 9, 992 e 20.

(1) Un breve riassunto ne fa T. L. HEATH richiamando l'attenzione su qualche osservazione particolarmente interessante dal punto di vista matematico; v. *The thirteen books of Euclid's Elements*, I, pag. 233-4.

tuale, ἐνεργείᾳ *vel* ἐντελεχείᾳ ἄπειρον) e ciò che è *infinito in potenza* (infinito potenziale, δυνάμει ἄπειρον).

Egli inoltre osserva che, secondo l'eccezione comune, una grandezza si dice infinita se è maggiore di qualunque altra e nessun'altra può essere maggiore di essa; esclude che in questo senso alcuna grandezza sensibile sia o possa essere infinita tanto *in atto*, quanto *in potenza*. Giacchè essa è necessariamente limitata e non può aumentarsi oltre ogni limite. Con ciò rimane esclusa l'esistenza attuale di grandezze infinitamente grandi ([1]).

Ma dell'infinito può darsi un'altra definizione, più generale della precedente, e che ARISTOTELE esprime con questi termini:

(*Phys.*, 6, 206 a 27): « Infinito, in generale, si dice « ciò di cui si può sempre prendere qualche cosa, e « quel che si prende, oltre che finito, è sempre di« verso ».

Si capisce come anche in questo senso nessuna grandezza possa essere infinita in atto; perchè, se qualcuna lo fosse, dovrebbe essere in atto infinitamente grande; ciò che fu escluso. E allora – aggiunge

([1]) Contro l'infinito attuale ritorna ARISTOTELE, in *Metaphys.*, X, 10, pag. 1066 a 35; 1067 a 37.

Aristotele – l'infinito non deve riguardarsi come una cosa particolare (quest'uomo, questa casa), ma come una cosa che è sempre in via di nascere e di perire, di crescere e di diminuire continuamente, e che, mantenendosi in ogni suo stato finita, è sempre diversa nei successivi stati. In tal senso si può dire che si ha l'infinito nel tempo, nell'uomo, nella divisione delle grandezze. Però sotto una forma diversa in ciascun caso: nelle grandezze ciò che si prende rimane; nel tempo e nell'uomo invece ciò che si prende passa subito o è distrutto, succedendosi e rinnovandosi senza fine. S'intende che in ogni caso si tratta non di un infinito attuale, bensì di un infinito potenziale.

Per quanto si riferisce in particolare al caso delle grandezze geometriche, Aristotele precisa meglio il suo concetto osservando che una grandezza può essere infinita *per divisione* (o *per sottrazione*) e *per addizione* [1].

Una grandezza è infinita *per divisione* in quanto è divisibile all'infinito:

(*ibid.*, 6, 206 a 16): « La grandezza, come è stato « detto, non è infinita in atto, ma lo è per divisione;

---

[1] *Phys.*, III, 4, 204 a 6; 6, 206 a 15; *Metaphys.*, X, 10, 1066 b 1.

« chè non è difficile toglier di mezzo le linee indivisi-
« bili. Rimane dunque che esista l'infinito in potenza ».

(*ibid.*, 7, 207, *b* 10): « Chè sono infinite le divi-
« sioni in parti uguali di una grandezza ».

Una grandezza può essere infinita anche *per addizione*, poichè può immaginarsi come formata da un numero infinito di altre grandezze. Come ciò debba intendersi lo spiega nel passo seguente:

(*ibid.*, 6, 206, *b* 3-13): « Ciò che è infinito per
« addizione, in un certo senso, è allo stesso modo in-
« finito di quello per divisione; giacchè in una cosa
« finita si ha l'infinito per addizione in un modo in-
« verso [a quello con cui si ha l'infinito per divisione].
« A quel modo infatti che la divisione tende all'infi-
« nito, allo stesso modo con l'addizione si ritorna al
« finito. Infatti, data una grandezza limitata e presane
« una determinata parte, se questa si aumenta nello
« stesso rapporto, ma in modo che non si aggiunga
« sempre una medesima grandezza alla totale [risul-
« tante dalle successive grandezze aggiunte], non
« si arriverà mai al termine della grandezza limitata.
« Se invece il rapporto si aumenta in maniera che si
« aggiunga sempre una medesima grandezza, si ar-
« riverà al termine; perchè ogni grandezza limitata

« viene esaurita da una qualsiasi determinata parte
« di essa. E così dunque non si ha in altro modo
« l'infinito, ma in questo modo soltanto: cioè in po-
« tenza e per sottrazione ».

Sia data, per esempio, una grandezza finita $MN = a$, e sia b una determinata porzione di essa: poniamo $b = \frac{1}{2} a$. Si tolga b da a a cominciare da M, e poi la metà di b, e poi la metà della metà di b, e così di seguito. In tal modo si può proseguire indefinitamente, senza mai raggiungere l'altro estremo N, e perciò senza esaurire la grandezza a. Si avrà invece una successione di grandezze

$$\frac{1}{2} a, \frac{1}{2^2} a, \frac{1}{2^3} a, \quad . \; . \; . \; . \; . \; ., \frac{1}{2^n} a, \; . \; .$$

che vanno progressivamente diminuendo (secondo una progressione geometrica), senza però che mai alcuna di esse, anche per valori grandissimi della esponente n, diventi nulla. Una successione quindi che può contenere un numero comunque grande di termini, e cioè infiniti termini $\frac{1}{2^n} a$, dei quali ciascuno minore del precedente, ma mai uguale a zero.

Reciprocamente, se si vuole riottenere la grandezza MN, dopo averla così divisa, sarà necessario riaggiungere l'una all'altra successivamente tutte le grandezze che si erano ottenute nella divisione predetta della stessa MN. E allora la grandezza a risulterà come somma di un numero infinito di grandezze; cioè sarà

$$a = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2^2}a + \frac{1}{2^3}a + \ldots \text{ sino all'infinito.}$$

Pertanto una grandezza finita può dirsi *infinita per addizione* nel senso che può ritenersi come risultante dalle somme di un numero infinito di grandezze, quelle stesse grandezze che si potrebbero ottenere nel modo di divisione sopradetto.

Ma non ogni divisione è infinita, e così neppure ogni addizione. Se infatti nella divisione si procede in modo che le grandezze successivamente tolte siano sempre uguali (sempre uguali, per esempio, all'n^{ma} parte, comunque piccola, di a), la divisione certamente avrà un termine. E analogamente, se la somma si compone di grandezze tutte uguali, basterà un numero *finito* di tali grandezze (per esempio, n) per riavere la grandezza a: « perchè ogni grandezza limi-

tata viene esaurita da una qualsiasi determinata parte di essa ».

Sul concetto dell'*infinito per addizione* ARISTOTELE insiste, spiegando come sia da escludersi la possibilità di un altro infinito per addizione che possa dar luogo a una grandezza infinitamente grande, sia pur potenziale.

(*ibid.*, 6, 206 *b* 16-22): « In questo modo si ha « un infinito potenziale anche per addizione, il quale « in un certo senso diciamo essere lo stesso che quello « per divisione; chè ci sarà sempre qualche cosa di « esso da prendere fuori di esso. Però esso mai oltre- « passerà tutte le grandezze limitate, come quello « per divisione oltrepassa qualsiasi grandezza limitata « e diventa più piccolo. Di modo che per addizione « non è possibile superare ogni grandezza neppure « in potenza ».

Questo vuol dire che nella divisione si possono avere grandezze più piccole di qualsiasi grandezza assegnata, basta ripetere l'operazione un numero sufficiente di volte; l'operazione stessa potendo proseguirsi indefinitamente, ne risulta la possibilità di grandezze *infinitamente piccole*. Invece è da escludersi in tutti i casi, nelle considerazioni fisiche e ma-

tematiche, la possibilità di grandezze *infinitamente grandi.*

Il contrario anche nei numeri. Si può infatti ammettere l'esistenza di numeri infinitamente grandi, perchè, dato un numero, si può sempre trovare un numero più grande di esso; ma non esistono numeri infinitamente piccoli, perchè si ha un *limite minimo* che non si può oltrepassare (ed è l'unità).

(*ibid.*, *7, 207 b* 1-5): «Con buona ragione si am-
« mette che, per quanto riguarda l'infinito nei numeri,
« esiste un limite verso il più piccolo, e verso il più
« [grande] si può superare ogni moltitudine; e che,
« al contrario, nel caso delle grandezze verso il pic-
« colo si può oltrepassare ogni grandezza, verso il
« più grande non esiste una grandezza infinita » ([1]).

Come causa della non esistenza di numeri infinitamente piccoli è addotto il fatto che il numero è composto di unità, e qualsiasi divisione del numero non può proseguirsi oltre l'unità, essendo questa indivisibile. (Le suddivisioni dell'unità non sono *numeri* perchè non rappresentano più moltitudini di oggetti).

([1]) Cfr. *de Coelo,* I, 5, 272 a 1: « diciamo che il numero è infinito perchè non esiste un numero che sia più grande (di ogni altro numero) ».

Che non esistano grandezze infinitamente grandi, neppure in potenza, è dimostrato con questo argomento:

(*ibid.*, 207 *b* 17-21): « Una cosa quanto può es-
« ser grande in potenza, altrettanto può essere in
« atto. Perciò, poichè non esiste nessuna grandezza
« sensibile che sia infinita, non può esistere una cosa
« capace di superare ogni grandezza finita; altrimenti
« vi sarebbe qualche cosa più grande dell'universo ».

Le idee aristoteliche ora riferite non dovevano costituire una novità per i geometri; anzi è da supporsi che nella sua trattazione il filosofo abbia tenute presenti le discussioni avvenute sullo stesso argomento tra i matematici, e nelle sue osservazioni si potrebbe vedere una risposta ai dilemmi di ZENONE, risposta conforme, assai verosimilmente, alle vedute dell'Eleate. È significativo il fatto che lo stesso filosofo abbia creduto opportuno osservare che le sue conclusioni non disturbano affatto la verità e le dimostrazioni matematiche.

(*ibid.*, 207 *b* 27-33): « Questo ragionamento
« non distrugge le investigazioni dei matematici,
« negando che esiste l'infinito in questo modo, che
« cioè si possa aumentare senza raggiungere mai

« un limite; giacchè essi ora dell'infinito non hanno « bisogno e non se ne servono, ma soltanto richiedono « (αἰτοῦνται, postulano) che la (linea retta) finita « possa diventare tanto lunga quanto vogliono. E « rimane ancora lecito dividere un'altra grandezza « nello stesso rapporto, qualunque esso sia, della mas- « sima grandezza. Cosicchè per essi non vi sarà nes- « suna differenza nelle dimostrazioni ».

Rimane così confermato che le dimostrazioni matematiche non si servivano dell'infinitamente grande, e neppure dell'infinitamente piccolo. Solo esse richiedevano una *relativa infinità* della linea retta, nel senso che questa potesse concepirsi tanto lunga quanto si voleva, e la possibilità di dividere due grandezze nello stesso numero di parti rispettivamente proporzionali [1].

Con questa osservazione ARISTOTELE mette in evidenza una delle caratteristiche del metodo di dimostrazione per esaustione, ideato e costruito

[1] ARISTOTELE osserva che una cosa può *immaginarsi* tanto grande quanto si vuole, e allora può dirsi infinita nel pensiero; ma ciò non implica che sia o possa essere infinita *di fatto* (*Phys.*, III, 8, 208 a 14 sg.). E con questo risponde il dubbio espresso *ibid.*, III, 4, 203 *b* 24: « poichè non v'è limite per il pensiero sembra che debba essere infinito anche il numero e le grandezze matematiche e ciò che è fuori dell'universo ».

espressamente per fare a meno dell'idea d'infinito. Di questo metodo non ignorava egli il principio fondamentale; a questo infatti si riferisce la seguente proposizione:

(*Phys.*, VIII, 10, 266 *b* 2): « Aggiungendo continuamente a una grandezza finita oltrepasserò qualsiasi grandezza limitata, e sottraendo ne rilascerò « similmente una minore di qualsiasi altra »;

la quale, pur nella sua forma non certo scientificamente precisa, ricorda il postulato di EUDOSSO-ARCHIMEDE e la X. 1 di EUCLIDE. Il senso di questa proposizione deve evidentemente essere interpretato d'accordo con le conclusioni precedenti. Si deve quindi intendere che, nelle applicazioni di essa, l'aumento o la diminuzione non erano mai spinte fino ad ottenere una grandezza infinitamente grande o infinitamente piccola, ma si arrestava sempre in una grandezza finita (più grande o più piccola di un'altra grandezza finita assegnata). E tale era indubbiamente il valore che avevano nella geometria antica i princìpii, su cui si basava il metodo di esaustione.

10. – Il libro XII degli « Elementi » di Euclide.

Quando ARISTOTELE scriveva le cose riferite, il metodo di esaustione era entrato nelle abitudini geometriche e aveva rivelato la sua importanza. In esso i geometri potevano trovare i mezzi per proseguire con sicurezza nelle ricerche infinitesimali. Ma non pare che tali ricerche siano state attivamente proseguite dai contemporanei o dagli immediati successori del grande geometra di Cnido.

Tutto ciò che fu fatto a questo riguardo fino ad EUCLIDE si trova raccolto e ordinato nel libro XII degli *Elementi*, del quale, oltre alle proposizioni ricordate più sopra, non abbiamo da riportare che le seguenti:

a) Sulla piramide:

prop. 8: « Le piramidi simili con basi triangolari stanno fra loro nel rapporto triplicato [come i cubi] dei lati omologhi »;

prop. 9: « In piramidi uguali [equivalenti] con basi triangolari le basi sono inversamente proporzionali alle altezze; e quelle piramidi, nelle quali le basi sono inversamente proporzionali alle altezze, sono uguali ».

b) Sul cono e sul cilindro:

prop. 11: « I coni e i cilindri che sono della stessa altezza stanno fra loro come le loro basi »;

prop. 12: « Coni e cilindri simili stanno fra loro nel rapporto triplicato [come i cubi] dei diametri delle loro basi »;

prop. 13: « Se un cilindro si taglia con un piano parallelo alle sue basi, allora come il cilindro sta al cilindro, così l'asse sta all'asse »;

prop. 14: « Coni e cilindri che hanno basi uguali stanno fra loro come le loro altezze »;

prop. 15: « In coni e cilindri uguali le basi sono inversamente proporzionali alle altezze; e quei coni e cilindri, le cui basi sono inversamente proporzionali alle altezze, sono uguali ».

c) Sulla sfera:

prop. 16. Problema: « Dati due circoli concentrici inscrivere nel circolo maggiore un poligono equilatero con un numero pari di lati, il quale non tocchi il circolo minore ».

(Si conduca nel circolo maggiore una corda, AC, che sia tangente al circolo minore; sia BD il diametro

perpendicolare alla corda e sia $\widehat{ADC}$ l'arco da essa sotteso. Suddividendo successivamente l'arco $\widehat{ADC}$ si troverà certamente, per la X. 1, un arco della stessa circonferenza minore di $\frac{1}{2}\widehat{ADC}$, avente un estremo, per esempio, in D; sia questo $\widehat{LD}$. La corda di quest'ultimo arco soddisfa evidentemente al problema, come vi soddisfa anche la corda dell'arco doppio di $\widehat{LD}$, avente il suo punto di mezzo in D).

prop. 17. Problema: « Date due sfere concentriche inscrivere nella sfera maggiore un poliedro che non tocchi la superficie della sfera minore ».

(Si taglino le due sfere con un piano passante per il centro; nel circolo massimo, sezione della sfera esterna, si costruisca un poligono regolare con un numero pari di lati, nessuno dei quali tocchi il circolo massimo della sfera interna. — Per i vertici di questo poligono si conducano altrettanti piani passanti per il centro perpendicolari al primo piano; e in ciascuno dei circoli massimi, che si otterranno come sezioni, si inscriva un poligono uguale a quello precedente. — Congiungendo opportunamente i vertici di questi poligoni, risulta un poliedro inscritto nella sfera esterna, che risolve il problema proposto).

prop. 18: « Le sfere stanno fra loro nel rapporto triplicato [come i cubi] dei rispettivi diametri ».

Siano due sfere; S, S' i loro volumi; d, d' i loro diametri.

Se non fosse

$$d^3 : d'^3 = S : S',$$

dovrebbe essere

$$d^3 : d'^3 = S : T,$$

essendo T il volume di una sfera maggiore o minore di S'.

α) Sia, se è possibile, $T < S'$.

Si supponga T concentrica con S', e si inscriva (XII. 17) in S' un poliedro tale che le sue faccie non tocchino in nessun punto T; e si inscriva in S un poliedro simile a quello inscritto in S'.

Ciò fatto, si ha:

$$S : T = d^3 : d'^3$$
$$= (\text{poliedro in } S) : (\text{poliedro in } S'),$$

e, permutando, $S : (\text{poliedro in } S) = T : (\text{poliedro in } S')$.

Ora, siccome

$$S > (\text{poliedro in } S)$$

deve essere

$$T > (\text{poliedro in } S').$$

Ma questo è assurdo, perchè per costruzione è

$$T < (\text{poliedro in } S').$$

Dunque non può essere

$$T < S'.$$

β) Sia, allora, $T > S'$.

In tale ipotesi si avrebbe

$$d'^3 : d'^3 = S' : X,$$

indicando con X il volume di una sfera minore di S.

Ma anche questo è assurdo, come si dimostra con un ragionamento analogo al precedente.

Dunque, rimane che sia $T = S'$, e quindi

$$d^3 : d'^3 = S : S' \qquad c.\ d.\ d.$$

Ai risultati ora ricordati dopo la compilazione euclidea per circa un secolo nulla fu aggiunto di nuovo. Dobbiamo arrivare fino ad ARCHIMEDE per poter segnalare una ripresa delle investigazioni infini-

tesimali. Quel che infatti ARCHIMEDE può attribuire ai suoi predecessori non esce dal contenuto del XII libro euclideo [1].

11. – Gli studi di Archimede.

ARCHIMEDE iniziò i suoi studi con l'astronomia e con la meccanica. Per quanto specialmente riguarda quest'ultima, egli seppe ben presto elevarsi dai problemi pratici alle speculazioni teoriche, riuscendo a porre i fondamenti di una Meccanica razionale. Il primo scritto che egli pubblicò fu probabilmente una raccolta di « Elementi di Meccanica » dove era dimostrata la proposizione fondamentale su i momenti statici ed eran determinati i centri di gravità del triangolo, del parallelogrammo, del trapezio.

La teoria dei centri di gravità fu da lui coltivata con particolare interesse e con notevole successo; l'applicò ai coni e ai cilindri, e l'estese a figure geo-

[1] Cfr. i Lemmi premessi alla prop. XVII del lib. I *de Sphaera et Cylindro*. Uno solo di essi, il 3°, non si trova in EUCLIDE: « I coni che hanno le stesse basi e [le stesse altezze] di vari cilindri stanno fra loro come i cilindri stessi ». Questa segue del resto facilmente dalla XII, 10; gli altri lemmi corrispondono alle propp. 11, 12, 13, 14, 15.

metriche di ordine più elevato: a superficie limitate da sezioni coniche e ai loro solidi di rivoluzione. Così nei suoi studi meccanici ARCHIMEDE rasentava il campo della geometria, giacchè s'incontrava con figure che erano assai poco note e che davano occasione a nuovi problemi geometrici; come, per esempio, la determinazione delle superficie e dei volumi di esse figure.

La risoluzione di tali problemi era superiore alla geometria tradizionale, gelosamente difesa e custodita dalla scuola di Alessandria, che costituiva allora il centro più autorevole di studi. ARCHIMEDE superò le difficoltà applicando alle questioni geometriche ragionamenti analoghi a quelli che adoperava nelle questioni meccaniche. Il primo risultato di questo tentativo fu la quadratura del segmento parabolico; di esso ARCHIMEDE diede subito communicazione ai matematici Alessandrini, esponendo il procedimento meccanico con cui l'aveva ottenuto e corredandolo anche di una rigorosa dimostrazione per esaustione.

Il nuovo metodo era di una fecondità straordinaria, ed ARCHIMEDE ne approfittò con fervore e genialità. La maggior parte delle sue scoperte devono ad esso la loro origine e la rapidità con cui si susse-

guirono. Assai tempo prima che fossero redatte nella forma definitiva in cui noi le possediamo, ARCHIMEDE ne inviò la lista al suo amico CONONE da Samo, maestro in Alessandria, di cui loda la non comune perspicacia nelle cose matematiche e la somma diligenza, allo scopo di farle conoscere anche agli altri matematici, perchè le discutessero e le studiassero. Si trattava precisamente di 7 problemi e di 2 teoremi sulla sfera, di 2 teoremi sul paraboloide di rivoluzione, oltre ad alcune proposizioni sulle spirali.

Le proposizioni cui qui si accenna, sono nuovamente ripetute nell'introduzione al trattato *sulle Spirali*, inviato a DOSITEO (*Opp.*, II, p. 4, 4 sg.):

a) *Problemi sulla sfera:* 1. Trovare una superficie piana equivalente alle superficie di una data sfera – 2. Trovare una sfera equivalente a un dato cono o cilindro. – 3. Segare una data sfera con un piano in modo che i segmenti sferici ottenuti abbiano tra loro un dato rapporto. – 4. Segare una data sfera con un piano in modo che le superficie dei segmenti ottenuti abbiano tra loro un rapporto dato. – 5. Rendere un dato segmento sferico simile a un altro segmento sferico. – 6. Dati due segmenti di una stessa sfera o di sfere diverse trovare un segmento sferico che sia equivalente a uno dei dati e che abbia una superficie uguale all'altro. – 7. Staccare da una data sfera con un piano un segmento che abbia con un cono della sua stessa

altezza e base un dato rapporto maggiore di 3/2. — La soluzione di questi problemi è esposta nel II libro *Sulla Sfera e sul Cilindro*: il primo alla fine dell'introduzione (*Opp.*, I, p. 170, 3 sg.), gli altri rispettivamente nelle propp. 1, 4, 3, 5, 6, 7. HEIBERG pensa che sia stato il copista ad invertire le propp. 3 e 4.

b) *Teoremi sulla sfera*: 1. Se una sfera si sega con un piano in due parti disuguali, il rapporto del segmento maggiore al segmento minore è uguale al quadrato del rapporto fra la superficie del maggiore e quella del minore. – 2. Sia diviso un diametro di una sfera in modo che il quadrato della parte maggiore sia triplo del quadrato della parte minore; se con un piano, perpendicolare al diametro, condotto per il punto di divisione si sega la sfera, la figura della stessa specie del segmento maggiore è la massima di tutti gli altri segmenti aventi la stessa superficie. — Questi due teoremi erano falsi; ARCHIMEDE lo avvertì più tardi, li corresse e li dimostrò in forma corretta nelle propp. 8, 9 del libro II *Sulla Sfera e sul Cilindro*.

c) *Teoremi sul Conoide* o *Paraboloide di rivoluzione:* 1. Il volume di un segmento di paraboloide è uguale a 1 $^1/_2$ del volume del cono che ha la stessa base e la stessa altezza. – 2. Due segmenti di paraboloide stanno fra loro come i quadrati dei loro assi. — Questi due teoremi sono dimostrati nelle propp. 21, 24 *Sui Conoidi e sugli Sferoidi*.

CONONE morì prima che potesse rispondere alle questioni propostegli, e non pare che gli altri matematici Alessandrini fossero all'altezza delle stesse

questioni; poichè, osserva ARCHIMEDE, «sono già passati molti anni dopo la morte di CONONE; ma io non hò saputo che qualcuno si sia occupato anche di uno solo di quei problemi» ([1]). Pare, anzi, che il giovane Siracusano non fosse preso troppo sul serio e che i suoi studi fossero riguardati piuttosto con indifferenza, come se non contenessero nulla affatto di nuovo. Ma non mancò l'occasione di far apparire ridicole le loro pretese. Infatti i due teoremi sulla sfera inviati a CONONE erano sbagliati, e nessuno si accorse della loro falsità prima che lo stesso ARCHIMEDE l'avesse riconosciuta. Onde, confessando candidamente il suo errore, egli potè prendersi giusta vendetta della misera ambizione dei maestri Alessandrini, facendo osservare come «coloro che vanno dicendo che essi scoprono tutto, senza però darne alcuna dimostrazione, possono esser colti in fallo per avere qualche volta proclamato di scoprire cose impossibili» ([2]). Ma ARCHIMEDE consapevole dell'importanza delle sue ricerche e fiducioso nella serietà del suo metodo, lasciò che i maestri d'Alessandria continuassero a difendere il vecchio patrimonio,

---

([1]) Cfr. *sulle Spirali*; *in Opp.*, II, pag. 2, 17 sg.
([2]) *Ibid.*, pag. 2, 22 sg.

mentre egli attendeva a consolidare i nuovi acquisti. Riprese infatti lo studio delle sue scoperte e ne confermò la validità, in ossequio alla tradizione, servendosi del metodo di esaustione, cui la potenza del suo genio seppe dare nuova vita e nuovo vigore.

12. - Il metodo meccanico di Archimede.

Ora, dovendo valutare l'opera geometrica di ARCHIMEDE, a noi interessano non solo i risultati e il modo come furono dimostrati, ma anche (e sopratutto) il metodo con cui furono trovati. Fortunatamente ARCHIMEDE stesso, in una lettera appositamente scritta e inviata ad ERATOSTENE in Alessandria, si è preoccupato di descriverci il suo metodo: ed è questo un segno dell'importanza che vi annetteva, non inferiore forse a quella che attribuiva alle sue stesse scoperte. Egli infatti si dice persuaso della grande utilità di esso per lo sviluppo e il progresso delle matematiche. Onde per infondere negli altri la stessa sua fiducia e per facilitarne lo studio e l'uso si decise a scrivere quella lettera, per far vedere come egli stesso abbia fatto le sue scoperte servendosi di questo metodo.

Archimede lo chiama *metodo meccanico:* esso risulta dalla felice combinazione di ragionamenti meccanici e di ragionamenti infinitesimali, ed è utile tanto per la determinazione dei centri di gravità, come per le quadrature e le cubature delle figure piane e solide. Nei suoi tratti essenziali lo schema del nuovo metodo è il seguente.

Ogni figura si considera come composta di elementi infinitesimali; che sono linee rette nel caso di figure piane e superficie nel caso di solidi. Così dice che il triangolo e il segmento parabolico son composti di corde parallele; il cilindro, la sfera, il cono di sezioni circolari parallele, e analogamente per altre figure. Si capisce come per linee e superficie si debbano intendere rispettivamente figure piane o solide a basi parallele con un'altezza infinitamente piccola.

In ogni figura il numero degli elementi è infinito. Ma Archimede non dice questo; dice solamente che ogni figura è *composta* o *riempita da tutti* i suoi elementi. Così il triangolo e il segmento parabolico è composto di *tutte* le corde parallele alla base; il cono, il cilindro, la sfera di *tutti* i circoli perpendicolari all'asse o a un diametro.

Ciò posto, supponiamo che si debba calcolare la superficie o il volume di una figura X, piana o solida. Si sceglie anzitutto opportunamente un'altra figura B, di cui si conosca la superficie o il volume e la posizione del centro di gravità. Si dispongono le due figure in modo che i loro diametri o i loro assi giacciano sulla stessa retta, cosicchè anche i loro centri di gravità sono situati sulla stessa retta. Si segano le due figure con piani paralleli e (in generale) perpendicolari all'asse; le sezioni ottenute sono i loro elementi infinitesimali, e le due sezioni fatte dallo stesso piano nell'una e nell'altra figura si considerano come elementi corrispondenti.

Si prolunga d'una lunghezza opportuna il diametro o l'asse, e il segmento ottenuto si considera come il giogo di una bilancia o l'asta di una leva di primo genere. Si tratta ora di stabilire sulla leva l'equilibrio fra gli elementi di X e quei di B, fissato preventivamente il punto d'appoggio P, o fulcro della leva. ARCHIMEDE sa che due grandezze sospese ai bracci d'una leva si fanno equilibrio quando è uguale il prodotto delle loro superficie o volumi per la distanza del loro centro di gravità dal fulcro; in altre parole « quando i loro momenti rispetto al punto d'appoggio sono uguali ».

Per determinare il momento di X si può procedere in questo modo: Uno qualsiasi dei piani tra loro paralleli e perpendicolari alla leva abbia da P la distanza X e determini nella figura X la sezione v, e nella figura B la sezione u; $v.\ dx$ e $u.\ dx$ saranno gli elementi corrispondenti di X e di B.

Posto che

$$v : u = x : d,$$

(relazione che negli esempi trattati da ARCHIMEDE si riesce a stabilire con facili considerazioni geometriche), si avrà che ogni elemento di X sospeso alla leva alla distanza d da P farà equilibrio al corrispondente elemento di B situato al suo posto.

Si immaginino allora *tutti* gli elementi di X trasportati e sospesi tutti per il loro centro di gravità nello stesso punto della leva, situato alla distanza d da P, dalla parte opposta, rispetto a P, a quello a cui sono situati gli elementi di B, i quali rimangono invece al loro posto. Anche in questa posizione *tutti* gli elementi di X faranno equilibrio a *tutti* gli elementi di B.

Questo vuol dire che la figura X sospesa per il suo centro di gravità nello stesso punto in cui furon so-

spesi i suoi elementi fa equilibrio alla B situata al suo posto; i loro momenti saranno perciò uguali. Il momento di X rispetto a P sarà dunque Vd, se con V indichiamo le sua superficie o volume; e se b è la distanza nota da P del centro di gravità di B, sarà Ub il suo momento [1]. Quindi:

$$V\ d = U\ b,$$

da cui

$$V = \frac{Ub}{d}, \text{ oppure } d = \frac{Ub}{V},$$

che dànno rispettivamente la superficie o il volume di X, o il suo centro di gravità se si conosce V.

In alcuni casi invece di una sola figura nota B, se ne sceglie anche un'altra C; ma il procedimento è in tutti i casi identico.

---

(1) In quest'occasione certamente ARCHIMEDE avrà osservato il teorema: La somma dei momenti di tutti gli elementi di una figura situati al proprio posto, rispetto a uno stesso punto, è uguale al momento della figura stessa, e cioè al prodotto del suo volume o della sua superficie per la distanza del suo centro di gravità dallo stesso punto.

Premesse queste osservazioni, facciamo seguire la traduzione del *Metodo*. Avremo occasione dopo la sua lettura di metterne in evidenza le caratteristiche geniali e la notevole importanza dei concetti a cui si inspira e dei procedimenti che adopera, in relazione allo sviluppo dell'Analisi infinitesimale.

PARTE SECONDA.

IL "METODO" DI ARCHIMEDE.

(TRADUZIONE)

Notizie preliminari.

1° Di ARCHIMEDE fino al 1906 si conoscevano gli scritti seguenti, che qui ripetiamo secondo l'ordine con cui li riportano quasi tutti i ms.:

1° Sulla sfera e sul cilindro, lib. I, II; περὶ σφαίρας καὶ κυλίνδρου α', β'.

2° Misura del cerchio; κύκλου μέτρησις.

3° Sui conoidi e sugli sferoidi; περὶ κωνοειδέων καὶ σφαιροειδέων.

4° Sulle spirali; περὶ ἑλίκων.

5° Sull'equilibrio dei piani, lib. I, II; ἐπιπέδων ἰσορροπιῶν α' β'.

6° Arenario; ψαμμίτης,

7° Quadratura della parabola; τετραγωνισμὸς παραβολῆς.

8° Sui corpi galleggianti, lib. I, II (Di questo si conosceva soltanto la traduzione latina fatta da GUGLIELMO DI MOERBEKE, sec. XIII).

Quest'ordinamento non corrisponde certamente alla successione cronologica degli scritti stessi. L'opinione più generale assegna ad essi l'ordine cronologico seguente:

1º Sull'equilibrio dei piani, lib. I.
2º Quadratura della parabola.
3º Sull'equilibrio dei piani, lib. II.
4º Sulla sfera e sul cilindro.
5º Sulle spirali.
6º Sui conoidi e sugli sferoidi.
7º Sui corpi galleggianti, lib. I, II.
8º Misura del cerchio.
9º Arenario.

2. Nel 1906 lo HEIBERG si recava a Costantinopoli per esaminare un palimpsesto appartenente alla Biblioteca del Metochion e proveniente dal Monastero del S. Sepolcro di Gerusalemme: *Codex rescriptus Metochii Constantinopolitani S. Sepulchri monasterii Hierosolymitani* 355, 4to. Esso si compone di 185 fogli; gli ultimi fogli 178-185 sono cartacei e risalgono al sec. XVI; mentre i primi 177 sono più antichi e contengono quasi tutti due scritture sovrapposte. La superiore, più recente (sec. XII-XIII,

o XIII-XIV) contiene un Eucologio; l'inferiore, una bella scrittura del sec. X, contiene scritti di ARCHIMEDE. Fortunatamente questa scrittura non fu raschiata, ma semplicemente lavata, di modo che essa è tuttora più o meno chiaramente visibile nella maggior parte dei 177 fogli. Si devono eccettuare 9 fogli che sono affatto illeggibili e 29 che non presentano nessuna traccia di questa scrittura, e alcuni altri fogli che lasciano trasparire solo poche parole [1].

Il ms. contiene brani di scritti già noti; e precisamente frammenti dei libri: *Sulla sfera e sul cilindro, sulle spirali* (quasi tutto), *Misura del cerchio, Sull'equilibrio dei piani.*

Ma quello che rende il ms. oltremodo prezioso di fronte agli altri posseduti dalle nostre biblioteche è la riproduzione nel testo greco dei libri:

Sui corpi galleggianti, I, II (quasi completo),

Stomachion (l'introduzione e le prime due proposizioni),

Ad Eratostene: Metodo sui teoremi meccanici.

Principalmente per quest'ultimo scritto la scoperta del palimpsesto Costantinopolitano ha costi-

---

[1] Il testo del ms. fu per la prima volta pubblicato da HEIBERG in *Hermes*, XLII, 1907, con introduzione e commento.

tuito un fatto storico d'importanza capitale. Anteriormente ad essa, del *Metodo* non si avevano che assai vaghe notizie. SUIDA (del IX o X sec. d. C.) vi accenna solo per dire che TEODOSIO ne aveva scritto un commento; ERONE (I a. C.) nei « Metrica » forniva qualche particolare più preciso, citandone tre proposizioni; e cioè la I, la XII, la XVI. Ma anche quest'opera rimase nascosta nella stessa biblioteca che conteneva il *Metodo*, e non fu pubblicata che nel 1903 da H. SCHÖNE [1]. E, così, per secoli si perdettero le traccie dell'opera archimedea; dagli stessi Greci pochissimo studiata a forse poco compresa, cadde fatalmente in una dimenticanza completa, senza che ad essa facessero mai la più piccola allusione anche i più ferventi studiosi di ARCHIMEDE [2].

3. L'argomento principale del *Metodo* consiste nella esposizione del modo come avvenne la scoperta di due teoremi riguardanti il volume del-

[1] *Heronis Alexandrini Opera*, vol. III; pag. 80, 17; 84, 11; 130, 12; 130, 25. ERONE lo cita con il titolo: 'Εφοδικόν.

[2] Bisogna ricordare che lo SCHMIDT dietro le indicazioni di ERONE cercò di precisare il contenuto geometrico dell'opuscolo in *Bibliotheca mathematica*, 3ª serie, I (1900), pag. 13; III (1902), pag. 143.

l'unghia cilindrica e del solido comune a due cilindri inscritti in un cubo, e della loro dimostrazione geometrica. Di questa occasione ARCHIMEDE approfittò per esporre il metodo con cui compì tutte le sue celebri e fortunate investigazioni relative alle quadrature, alle cubature e alla determinazione dei centri di gravità. E con questo egli fece opera nuova, di un carattere affatto diverso a quello che contraddistingue gli altri suoi scritti. In questi, infatti, egli non espone che i risultati delle sue ricerche, presentandoli nella forma tradizionale derivata dall'uso della dimostrazione per esaustione, la quale è di natura sintetica, non analitica; e quindi posteriore, in ordine logico, alla scoperta del risultato che dimostra. Se si volesse perciò seguire un ordine razionale nella lettura degli scritti archimedei, bisognerebbe cominciare con la lettura dei due libri *sull'Equilibrio*, e subito dopo leggere il *Metodo*, che costituisce la migliore preparazione per l'intelligenza degli altri scritti.

4. Questo in ordine logico; ma non è ugualmente facile disporre il *Metodo* nella serie degli scritti conosciuti al posto che gli spetta per l'ordine cronologico,

Notiamo che ARCHIMEDE, prima di redigere nella forma definitiva i risultati dei suoi studi soleva comunicarli ai suoi amici di Alessandria, perchè li discutessero e ne suggerissero, eventualmente, modificazioni o perfezionamenti; di modo che la pubblicazione della dimostrazione di un teorema seguiva sempre dopo un intervallo di tempo, più o meno lungo, la scoperta di esso. Così apprendiamo che i due teoremi, che formano l'argomento principale del *Metodo*, furono già prima della pubblicazione di esso inviati ad ERATOSTENE.

Anteriore indubbiamente al presente scritto è il trattato sulla « quadratura della parabola » inviato a DOSITEO. Parimenti anteriori ad esso furono: i problemi e le proposizioni, riguardanti la sfera e il paraboloide, inviati a CONONE, e di cui si ha notizia nell'introduzione al trattato « sulle spirali ». Ma quando comparve quest'ultimo trattato, le questioni proposte circa la sfera erano già state tutte risolute nel II libro *Sulla sfera e sul cilindro*. La dimostrazione invece dei due teoremi riguardanti il paraboloide venne pubblicata più tardi nel libro *Sui conoidi e sugli sferoidi*.

Ma nell'introduzione allo scritto che ora ci occupa si accenna a teoremi « già scoperti » riguar-

danti conoidi e sferoidi. Ora di sferoidi non si parlava nella comunicazione fatta a CONONE; quindi bisogna ammettere che il nostro scritto faccia seguito a qualche altro scritto, posteriore a quella communicazione. Questo altro scritto potrebbe essere semplicemente il trattato che noi possediamo *Sui conoidi e sugli sferoidi*? oppure un'altra memoria inviata prima di questo trattato ad Alessandria? ZEUTHEN [1] esclude la prima ipotesi e ammette come verosimile la seconda.

Un'altra cosa da notare, secondo lo ZEUTHEN, è che nell'introduzione al nostro scritto, pur parlandosi di « sferoidi » non si fa menzione alcuna della « sfera ». Questa osservazione dev'essere unita a un'altra notizia che si ricava dalla conclusione della prop. II, e cioè che la conoscenza del volume della sfera precedette quella della sua superficie; mentre nel libro I *Sulla sfera e sul cilindro* il valore della superficie è dedotto indipendentemente e *prima* di quello del volume. In queste constatazioni lo ZEUTHEN trova motivi per avanzare l'ipotesi che il *Metodo* sia stato scritto anteriormente al trattato *Sulla sfera e sul cilindro*.

---

[1] V. il *Commento* al *Metodo*, in *Bibl. Mathematica*, VII, 1907.

A me pare che tutte queste cose lascino assolutamente indisturbata la questione cronologica degli *scritti*. Esse offrono invece dei dati sicuri per l'ordinamento cronologico delle *scoperte*. Alla quadratura della parabola seguono gli studi sulla sfera (volume e superficie della sfera, di segmenti sferici); da questa si passa, con un processo di generalizzazione facile a comprendere, agli studi sopra gli elissoidi, i paraboloidi, gli iperboloidi di rotazione.

Del resto, la conoscenza del volume della sfera era già presupposta per la risoluzione dei problemi inviati a CONONE. La II prop. del *Metodo* non costituiva dunque una novità. La poteva costituire forse la determinazione della superficie sferica (che era appunto richiesta nel primo dei problemi citati); ma dal modo come vi accenna ARCHIMEDE, fa l'impressione come se essa fosse oramai un risultato conosciuto, e non come una prima rivelazione e come un'ipotesi da sottoporre a ulteriori ricerche e controlli.

Le prime undici proposizioni del nostro scritto furono scelte per dichiarare il metodo e illustrarne le varie applicazioni. ARCHIMEDE riconosce e af-

ferma l'importanza del suo metodo e ne proclama la grande utilità; si capisce come egli potesse ciò fare senza temere alcuna obiezione, ove si supponga che i suoi lettori possedessero già una rigorosa dimostrazione geometrica dei risultati che da quel metodo ripetono la loro origine.

Concludiamo che ci pare poco probabile che il nostro scritto sia anteriore a quasi tutta la produzione archimedea (tale sarebbe infatti se fosse posto prima dei libri *Sulla sfera e sul cilindro*); mentre invece è più verosimile l'opinione che esso sia uno degli ultimi lavori, posteriore al trattato *Sui conoidi e sugli sferoidi*, e forse anche ai due seguenti. Esso è come l'epilogo dell'attività scientifica del Siracusano, e la sua più bella eredità: il mezzo sicuro per scoprire nuovi tesori [1].

5. L'esposizione del *Metodo* è preceduta da alcuni *lemmi:* uno di natura algebrica e dieci appartenenti alla Statica. Questi sono presentati come ipo-

---

[1] Quest'opinione sembra confermata anche da ragioni filologiche, secondo gli studi di T. Kierboe, *Bemerkungen über di Terminologie des Archimedes*, Bibl. Mathemat. (3) XIV, 1914, pag. 33-40. Cfr. F. Arendt, *Zu Archimedes, ibid.*, pagg. 289-311.

tesi o come proposizioni già note ai lettori, e si può ritenere che fosse facile ritrovarle in qualche libro di uso comune. Ora noi non possediamo libri speciali di Statica anteriori al trattato archimedeo *Sull'equilibrio dei piani*. Nel I libro di questo si ritrovano soltanto alcune delle premesse qui ricordate (2, 5, 6). Perciò può darsi o che tale libro in origine fosse assai più esteso e che a noi sia giunto ridotto e mutilato, oppure che, oltre ad esso, esistessero già altri libri consimili. Si delinea così la possibilità dell'esistenza di un precursore di ARCHIMEDE che avesse già trattato dei centri di gravità (ZEUTHEN); oppure si deve ammettere che ARCHIMEDE, avesse già pubblicato altri scritti riguardanti i principi della Statica.

A questo proposito è utile ricordare che attraverso ERONE, PAPPO e Commentatori Arabi si son conservate notizie di opere di Statica scritte da ARCHIMEDE e ora perdute [1].

Lo stesso ARCHIMEDE accenna a libri di Meccanica da lui scritti e diversi da quelli che possediamo:

a) in *Sui corpi galleggianti* II, 2 (II, 350, 21-22), rimanda ad un libro intitolato Στοιχεῖα τῶν μηχανι-

---

[1] Cfr. *Archimedes Opera*, II, pagg. 545-49, fragmenta 11-16.

κῶν, per ciò che riguarda il centro di gravità della differenza di due grandezze aventi centri di gravità diversi; teorema che si ritrova in *Sull'equilibrio dei piani*, ed è citato nel nostro al lemma 2;

b) in *Quadratura della parabola* 6 (II, 274, 9), per la dimostrazione relativa al centro di gravità del triangolo rimanda a un libro intitolato Μηχανικά.

Queste due citazioni si riferiscono evidentemente allo stesso libro, dedicato agli *Elementi della Meccanica*, e di cui il presente I libro *Sull'equilibrio* è solamente una parte.

c) in *Sui corpi galleggianti* II, 2 (II, 350, 13), dice che la determinazione del centro di gravità di un segmento di conoide rettangolo (paraboloide) si ritrova in un libro intitolato Ἰσορροπίαι (ἐν ταῖς Ἰσορροπίαις);

d) nel *Metodo*, prop. I (II, 438, 2), dice che la dimostrazione per il centro di gravità del triangolo si trova ἐν τοῖς Ἰσορροπικοῖς.

È probabile che il libro così citato trattasse dell'*Equilibrio* o dei *Centri di gravità*, specialmente delle figure solide, e fosse una continuazione degli *Elementi della Meccanica*.

L'attuale II libro *Sull'equilibrio*, che tratta soltanto del centro di gravità della parabola, poteva

essere o una memoria separata, oppure una parte di un'opera assai più vasta.

Concludendo, negli *Elementi* avrebbero trovato il loro posto i lemmi 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7; nei *Centri di gravità* gli altri 8, 9, 10.

Comunque si vogliano interpretare le citazioni ricordate, una cosa risulta chiara dalle precedenti osservazioni, e cioè che oltre i libri *Sull'equilibrio dei piani* dovevano esistere altre opere di Statica, di ARCHIMEDE o di altri, che completassero le nozioni contenute in quei libri. Rimane in dubbio se ARCHIMEDE sia stato l'inventore di tutte le proposizioni statiche premesse al *Metodo* e quindi anche l'autore del concetto di centro di gravità, oppure se qualche cosa sia da attribuirsi a dei possibili suoi precursori. Ma in ogni caso egli certamente si deve riguardare come il fondatore della teoria razionale dei centri di gravità e degli elementi meccanici.

Sta il fatto che nel più volte citato libro *Sull'equilibrio* il concetto di centro di gravità non è considerato come nuovo; soltanto si stabiliscono le ipotesi necessarie per la sua esatta determina-

zione geometrica. Inoltre, egli nega alle sue deduzioni meccaniche qualunque valore dimostrativo. E lo nega non solo alle deduzioni esposte nel *Metodo;* le quali, dal punto di vista logico, possono ritenersi insufficienti, perchè non rivestono la forma geometrica tradizionale e fanno uso di concetti geometrici non rigorosamente definiti. Ma anche nella *Quadratura della parabola*, sebbene il procedimento meccanico avesse la forma esatta di una dimostrazione per esaustione, credette necessario aggiungervi una rigorosa dimostrazione geometrica. E questo si può spiegare osservando che, pur avendo dato ai concetti meccanici che adoperava una sistemazione logica, questa era ancora troppo nuova per potere sperare che tutti i lettori attribuissero una sicurezza geometrica alle dimostrazioni fondate sopra quei concetti (e questa è la spiegazione suggerita anche dallo ZEUTHEN).

La traduzione del *Metodo* è stata eseguita sulla seconda edizione dell'HEIBERG (vol. II delle *Opere di Archimede*). Essa riproduce fedelmente il testo; soltanto per indicare le uguaglianze e le proporzioni mi son servito delle moderne notazioni, e ciò, mentre nulla toglie alla fedeltà della traduzione, ne facilita la lettura.

Ho racchiuso fra parentesi quadre i passi destinati a colmare le lacune del testo ed ho aggiunto una ricostruzione delle proposizioni (XVI, XVII) riguardanti il volume del solido comune a due cilindri inscritti in un cubo, che nel ms. mancano completamente.

Metodo sui teoremi meccanici: Archimede ad Eratostene.

'Αρχιμήδους περὶ τῶν μηχανικῶν θεωρημάτων πρὸς 'Ερατοσθένην ἔφοδος.

(Introduzione)

Archimede a Eratostene salute.

Ti scrissi precedentemente circa alcuni teoremi da me trovati, e ti inviai i loro enunciati, invitandoti a trovarne le dimostrazioni, che io allora non potei indicare. Gli enunciati di quei teoremi erano i seguenti:

Del primo: Se in un prisma retto avente per base un parallelogrammo [1] si inscrive un cilindro avente le basi sopra due parallelogrammi opposti e i lati sopra gli altri piani del prisma [2], e se per il centro del cerchio base del cilindro e per un lato del quadrato della faccia opposta si conduce un piano, questo piano staccherà dal cilindro un segmento limitato da due piani e dalla superficie del cilindro, cioè dal piano secante e dal piano, in cui è situata

---

[1] Il termine παραλληλόγραμμος ha quasi sempre in ARCHIMEDE il significato di *rettangolo*; in questo caso vale precisamente *quadrato*. Il prisma di cui si parla è evidentemente un *parallelepipedo;* ma questo termine, sebbene già adoperato da EUCLIDE, non è mai usato da ARCHIMEDE.

[2] Cioè, la superficie laterale tangente alla altre faccie del prisma.

la base del cilindro, e dalla superficie [cilindrica] compresa fra questi due piani; il segmento cilindrico così determinato è la sesta parte di tutto il prisma.

L'enunciato del secondo era: Se in un cubo s'inscrive un cilindro avente le basi sopra due parallelogrammi opposti e la superficie (laterale) tangente agli altri quattro piani (faccie), e se nello stesso cubo s'inscrive poi un altro cilindro avente le basi su altri due parallelogrammi e la superficie tangente agli altri quattro piani, il solido compreso dalle superficie dei cilindri e comune ad ambedue i cilindri, è uguale ai due terzi di tutto il cubo ([1]).

Merita di esser notato come questi teoremi differiscono da quelli scoperti precedentemente: infatti i solidi, di cui allora trattavamo, cioè i conoidi e gli sferoidi ([2]) e i loro segmenti, vennero confrontati rispetto al volume, con coni e cilindri, e nessuno di essi fu trovato uguale a una figura solida limitata da piani; invece delle figure ora considerate, comprese da due piani e da superficie cilindriche, ciascuna si trova essere uguale a una figura solida limitata da piani.

Le dimostrazioni appunto di questi teoremi ho trascritto in questo libro, e a te le invio.

Ma siccome ti riconosco, come già ho detto, studioso e maestro eccellente di filosofia, e sai apprezzare, quando è il caso, le ricerche matematiche, ho creduto bene esporti

([1]) Questi due teoremi sono citati da Erone, *Metrica*, ed. Schoene, p. 130, 15.

([2]) Ossia, paraboloidi ed ellissoidi di rotazione. Qui si riferisce al trattato *Sui conoidi e sugli sferoidi* inviato a Dositeo.

e dichiararti in questo stesso libro le particolarità di un metodo, mediante il quale ti sarà possibile acquistare una certa facilità di trattare cose matematiche per mezzo di considerazioni meccaniche. Son persuaso, del resto, che questo metodo sarà non meno utile anche per la dimostrazione degli stessi teoremi. Infatti, anche a me alcune cose si manifestarono prima per via meccanica, e poi le dimostrai geometricamente; perchè la ricerca fatta con questo metodo non importa una vera dimostrazione. Però è certamente più facile, dopo avere con tal metodo acquistato una certa cognizione delle questioni, trovarne la dimostrazione, anzichè cercarla senza averne alcuna cognizione preliminare. Per questa ragione, anche di quei teoremi, riguardanti il cono e la piramide, di cui Eudosso trovò per primo la dimostrazione, cioè che il cono è la terza parte del cilindro e la piramide è la terza parte del prisma, aventi la stessa base e altezza uguale, un merito non piccolo dovrebbe attribuirsi a Democrito, che per primo enunciò questa proprietà delle dette figure senza dimostrazione.

Anche nel mio caso è accaduto che la scoperta dei teoremi, che ora pubblico, è stata fatta in modo simile a quella dei teoremi predetti. In quest'occasione ho deciso di esporre per iscritto il metodo, sia perchè l'avevo già preannunziato e non vorrei che si dicesse aver io fatta una promessa vana (1), sia perchè son persuaso che non poca

---

(1) Nella prefazione alla *Quadratura della parabola* dice appunto ARCHIMEDE a DOSITEO che gli invia un nuovo teorema sull'area del segmento parabolico « scoperto primieramente per via meccanica e poi dimostrato geometricamente » (*Opp.*, II, 262, 11-13).

utilità esso arrecherà alla matematica; penso infatti che alcuni dei presenti o dei futuri, mediante questo metodo, possan trovare anche altri teoremi, che a me non sono ancora venuti in mente.

Espongo in primo luogo quello che fu anche il primo risultato che mi si manifestò per via meccanica, cioè che « ogni segmento di una sezione di cono rettangolo [1] è uguale ai quattro terzi del triangolo avente la stessa base e altezza uguale », e dopo questo ciascuno degli altri risultati ottenuti con questo metodo. Alla fine del libro esporrò le dimostrazioni geometriche di quei teoremi, di cui ti ho già communicato gli enunciati [2].

Lemmi.

1. Se da una grandezza si toglie un'altra grandezza, e se uno stesso punto è il centro di gravità della grandezza intera e di quella tolta, questo stesso punto è il centro di gravità anche della grandezza restante.

---

[1] Così dice sempre ARCHIMEDE in luogo di « parabola », termine introdotto più tardi da APOLLONIO. *Cono rettangolo* è il cono che ha l'angolo al vertice retto; la parabola è la sezione fatta da un piano perpendicolare ad una generatrice di tal cono.

[2] Le ultime linee di questo periodo sono in parte illegibili nel ms.; sono state completate da HEIBERG. In esse lo scopo del presente scritto viene limitato a quello di dare la dimostrazione delle due succitate proporzioni e di indicare la via che ha condotto alla loro scoperta, cercando in pari tempo con altri esempi di dichiarare l'utilità e i procedimenti del metodo meccanico. Questo è in accordo con il senso di tutta l'introduzione, e ci sembra che sia assolutamente da escludere che ARCHIMEDE potesse promettere di dare le dimostrazioni di *tutte* le proposizioni che egli viene esaminando con lo stesso metodo.

2. Se da una grandezza si toglie un'altra grandezza, e se la grandezza intera e quella tolta non hanno lo stesso centro di gravità, il centro di gravità della grandezza restante si trova prolungando (oltre il centro della grandezza intera) la retta congiungente i centri di gravità della grandezza intera e di quella tolta e togliendo da questa un segmento che abbia con la congiungente i sopradetti centri di gravità lo stesso rapporto che ha il peso della grandezza tolta con il peso della grandezza restante.

Cioè, sia la grandezza $A = a + b$, e sia C il centro di gravità di A e E quello di a. Si unisca $E C$ e si prolunghi oltre C. Il centro di gravità di $A - a = b$ sarà in un punto F, sul prolungamento di EC, tale che

$$FC : CE = a : b .$$

Questa prop. è dimostrata in *Sull'equilibrio dei piani*, I, 8; (II, 138). È anche citata in *Sui corpi galleggianti*, II, 2 (II, 350, 21), dove è detto che essa è dimostrata ἐν τοῖς Στοιχείοις τῶν μηχανικῶν, di cui si è parlato nei preliminari.

3. Se i centri di gravità di quante si vogliano grandezze sono sulla stessa retta, anche il centro di gravità della grandezza risultante dalla loro somma sarà sulla stessa retta.

4. Il centro di gravità di una retta [segmento di retta] è il suo punto di mezzo ([1]).

([1]) I lemmi 3, 4 non si ritrovano nelle opere archimedee da noi possedute; però, come fa osservare HEIBERG, il 3 è implicitamente presupposto in *Sull'equilibrio dei corpi*, I, 4, 13; II, 2, 5; I, 5 e *Coroll.*; il 4 in I, 4.

5. Il centro di gravità di un triangolo è il punto, in cui si tagliano scambievolmente le rette condotte dai vertici del triangolo al punto di mezzo dei lati [opposti].

[È dimostrato in *Sull'equilibrio*, I, 13, 14].

6. Il centro di gravità di un parallelogramma è il punto in cui si incontrano le diagonali.

7. Il centro di gravità di un circolo è lo stesso centro del circolo.

8. Il centro di gravità di un cilindro è il punto di mezzo dell'asse.

9. Il centro di gravità di un prisma è il punto di mezzo dell'asse ([1]).

10. Il centro di gravità di un cono è sull'asse, in un punto che lo divide in modo che la parte verso il vertice sia il triplo della rimanente ([2]).

11. Mi servirò anche di questo teorema:

Date quante si vogliano grandezze e altre grandezze nello stesso numero, tali che quelle che occupano lo stesso posto, due a due, abbiano lo stesso rapporto, e se inoltre

---

([1]) Per *asse del prisma* vuol intendere la retta che congiunge i centri di gravità delle sue basi. Notiamo che la parola « prisma » è d'incerta lettura.

([2]) Nelle opere scritte da ARCHIMEDE quali noi le possediamo, non si trova nessuno accenno a tale proposizione; è probabile quindi che essa fosse stabilita con un procedimento indipendente dal nuovo metodo. Forse, come suggeriscono ZEUTHEN e REINACH, essa fu ottenuta in questo modo:

1° determinando il centro di gravità d'una piramide triangolare; 2° estendendo il risultato e una piramide poligonale qualsiasi; 3° considerando il cono come il limite della serie delle piramidi inscritte.

le prime grandezze, o tutte o alcune di esse, hanno quali si vogliano rapporti con altre grandezze, anche le seconde grandezze abbiano gli stessi rapporti con altre grandezze, allora la somma delle prime grandezze sta alla somma di quelle con cui furon messe in rapporto, come la somma delle seconde sta alla somma di quelle con cui furon messe in rapporto.

In altri termini, sieno le grandezze

$$A_1, A_2, \ldots, A_n;\ B_1, B_2, \ldots, B_n,$$

tali che

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2};\ \frac{A_2}{A_3} = \frac{B_2}{B_3};\ \text{ecc....};$$

sieno inoltre altre due serie di grandezze

$$C_1, C_2, \ldots;\ D_1, D_2, \ldots,$$

tali che

$$\frac{A_1}{C_1} = \frac{B_1}{D_1};\ \frac{A_2}{C_2} = \frac{B_2}{D_2};\ \text{ecc...}$$

Allora si avrà

$$\frac{\Sigma A_i}{\Sigma C_i} = \frac{\Sigma B_i}{\Sigma D_i}$$

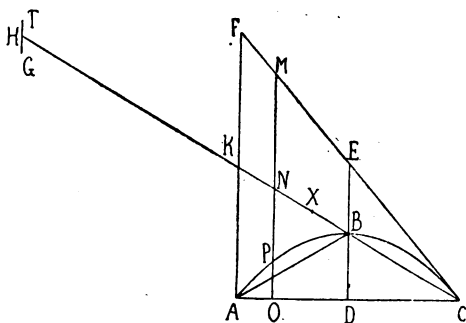
Questa prop. è dimostrata in *Sui conoidi*, I.

I.

Area di un segmento parabolico.

Sia ABC un segmento compreso dalla retta AC e dalla parabola ABC; si divida AC per metà in D e si conduca la retta DBE parallela al diametro ([1]) e si tirino le rette AB, BC.

Dico che il segmento ABC è i quattro terzi del triangolo ABC ([2]).

Si conducano dai punti A, C la retta AF parallela a DBE, e la CF tangente alla parabola; si prolunghi CB

fino in K, e si faccia KH uguale a CK. Si consideri CH come il giogo di una bilancia, di cui K sia il punto di mezzo; sia MO una retta qualunque parallela a ED.

([1]) Per *diametro* intende ARCHIMEDE il *diametro principale* o *asse* della parabola. Altrove egli chiama diametro d'un segmento curvilineo la retta che divide per metà tutte le corde parallele alla base del segmento (*Sui conoidi e sugli sferoidi*, 3; I, 272, 3) avvicinandosi alla terminologia moderna.

([2]) La dimostrazione di questo teorema forma l'oggetto dell'opuscolo *Quadratura della parabola* (Opera, II, pag. 262 sgg.); il

Poichè dunque CBA è una parabola, e CF è ad essa tangente e CD è un'ordinata [1], si ha $EB = BD$, come è dimostrato negli « Elementi » [2]. Per questa stessa ragione, e perchè FA, MO sono parallele, è anche

$$MN = NO\,, \quad \text{e} \quad FK = KA.$$

E poichè

$$CA : AO = MO : \mathrm{OP}\ (^3), \quad \text{e} \quad CA : AO = CK : KN,$$

si avrà, essendo anche $CK = KH$,

$$HK : KN = MO : OP\,.$$

---

quale contiene propriamente due dimostrazioni: una dimostrazione meccanica (propp. I - XVII) e una geometrica (XVIII-XXIV).

[1] Il testo dice: καὶ τεταγμένως ἡ ΓΔ (sottinteso κατηγμένη frase che è adoperata da Archimede anche altrove *Sull'equilibrio dei piani*, II, 10; vol. II, 206, 10) e con la quale vuole intendere che $C\,D$ è la (metà della) corda parallela alla tangente in B, vertice del segmento parabolico. Noi diremmo che $C\,D$ è la (metà della) corda coniugata al diametro $B\,D$. La stessa denominazione fu adottata e consacrata da Apollonio (cfr. *Conic.*, I, def. 4). Essa fu tradotta (dal Commandino) con la frase *ordinatim applicata* (*ordinatamente applicata*).

[2] Cioè, nelle opere elementari sulle *sezioni coniche*. Ne furono infatti composte due prima di Archimede: una da Aristeo il *Vecchio* e una da Euclide (cfr. Loria, *Le scienze esatte nell'antica Grecia*, pag. 157 sg., 267; Heath, *Apollonius of Perga*, Cambridge, 1896, pag. xxi sg.)

Il teorema più ricordato ricorre anche in *Quadratura della parabola*, 2, e fu dimostrato da Apollonio in *Conic.*, I, 35. Ricordando che $E\,D$ è la sottotangente del punto C, il teorema stesso può enunciarsi così: « In una parabola, la sottotangente di un punto qualsiasi è divisa per metà dal vertice ». (Cfr. Castelnuovo, *Lezioni di Geom. anal.*, N. 275).

[3] Segue una frase che dice: « questo infatti fu dimostrato in un lemma ». L'abbiamo omessa, perchè Heiberg crede che sia

Ora, poichè il punto N è il centro di gravità della retta MO, essendo $MN = NO$ [*lem.* 4], se prendiamo la retta TG uguale a OP e poniamo TG col centro di gravità in H, in modo che sia $TH = HG$, la retta THG farà equi-

---

un'aggiunta; il lemma doveva essere scritto in margine e poi sparito.

Questa relazione è dimostrata in *Quadratura della parabola*, 4 e 5, e viene ottenuta dalla proprietà fondamentale della parabola:

$$BD \ : \ BQ = \overline{AD}^2 \ : \ \overline{PQ}^2 \qquad [1]$$

(dove Q è il punto in cui la parallela per P ad AC incontra BD) con l'applicazione di proprietà note circa le proporzioni. Ora è interessante osservare come la [1] corrisponde all'equazione della parabola

$$y^2 = 2\,a\,x \qquad [2]$$

riferita al diametro e alla tangente nel vertice, e che la relazione qui indicata corrisponde invece all'equazione della parabola riferita alla corda CA (asse x) e al diametro per C (asse y); cioè:

$$2\,p\,y = x\,(2\,a - x). \qquad [3]$$

Infatti, riferendoci a questo nuovo sistema di assi, la relazione stessa si può scrivere così (posto $2\,a = AC$):

$$2\,a \ : \ (2\,a - x) = MO \ : \ y. \qquad [4]$$

Ma dalla [2] si ha $BD = \frac{a^2}{2p}$; e inoltre, per essere

$$OM : 2\,BD = CO : CD, \text{ si ha } OM = \frac{a}{p}\,x.$$

Sostituendo questo valore di OM in [4] si ha precisamente la [3]. Quindi la relazione di cui trattiamo rispetto alla [1] nella geometria antica aveva lo stesso ufficio che una trasformazione di coordinate nella nostra. (Cfr. ZEUTHEN, *Die Lehre von den Kegelschnitten im Altertum*, Kopenhagen, 1886, pag. 59).

librio alla MO, situata al suo posto, per essere HN divisa (dal punto K) in parti inversamente proporzionali ai pesi TG, MO, e cioè perchè

$$HK : KN = MO : GT \text{ (1)};$$

quindi K è il centro di gravità della somma di ambedue i pesi [*lem.* 3].

Similmente, se si conducono nel triangolo FAC quante si vogliano parallele a ED, esse, rimanendo al loro posto, faranno equilibrio ai segmenti intercettati sopra di esse dalla parabola e trasportati nel punto H, in modo che il centro di gravità della somma degli uni e delle altre sia K.

Ora, dalle rette condotte nel triangolo CFA è composto il triangolo stesso CFA, e dai segmenti rettilinei ottenuti nella parabola allo stesso modo che PO è composto il segmento parabolico ABC;

perciò il triangolo FAC, rimanendo al suo posto, farà equilibrio, rispetto al punto K, al segmento parabolico trasportato con il suo centro di gravità in H, in modo che il centro di gravità della loro somma sia il punto K.

Si tagli ora CK nel punto X, in modo che sia $CK = 3KX$; il punto X sarà il centro di gravità del triangolo AFC, come è dimostrato nei libri sopra l'Equilibrio [2].

Poichè dunque il triangolo FAC, rimanendo al suo posto, fa equilibrio, rispetto al punto K, al segmento

(1) Cfr. *Sull'equilibrio dei piani*, I, 6, 7.

(2) Cfr. *lemma* 5 e *Notizie preliminari*, pag. 101.

BAC, posto con il suo centro di gravità in *H*, e *X* è il centro di gravità del triangolo *FAC*, sarà per conseguenza

$$\text{tr. } AFC : \text{segm. } ABC \text{ posto in } H = HK : XK.$$

Ma è

$$HK = 3\ KX,$$

perciò anche

$$\text{tr. } FAC = 3\ (\text{segm. } ABC).$$

Inoltre,

$$\text{tr. } FAC = 4\ (\text{tr. } ABC)\ ,$$

perchè è

$$FK = KA \text{ e } AD = DC\ ;$$

quindi

$$\text{segm. } ABC = \frac{4}{3}\ (\text{tr. } ABC)\ (^1).$$

Veramente le cose dette non dimostrano il risultato; dànno però alla conclusione una certa apparenza di verità. Perciò, vedendo che la conclusione non è dimostrata, ma sospettando con ragione che sia vera, ne ricercherò la dimostrazione geometrica; la quale io stesso ho trovato e ho già pubblicato (²).

(¹) Segue la frase: « questo dunque è chiaro », che, secondo HEIBERG, è un'aggiunta inutile e inopportuna.

(²) Nell'opuscolo sulla *Quadratura della parabola*, XVIII-XXIV. La parola che nel testo corrisponde al verbo « ne ricercherò » è il verbo τάξομεν. REINACH dubitò che fosse questa una lezione giusta; ma HEIBERG nella 2ª edizione la conferma come esatta, e tra-

II.

Volume della sfera.

Ogni sfera è quattro volte maggiore del cono, che ha la base uguale a un circolo massimo della sfera e l'altezza uguale al raggio della sfera;

il cilindro, che ha la base uguale a un circolo massimo della sfera e l'altezza uguale al diametro della sfera, è una volta e mezzo più grande della sfera ([1]).

Queste proposizioni si possono dichiarare con questo metodo nel modo seguente:

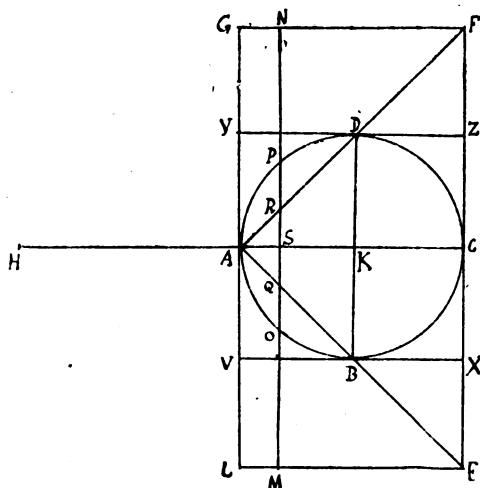
Sia data una sfera, e in essa il circolo massimo $ABCD$, e i diametri AC, BD tra loro perpendicolari; e sia, nella sfera, intorno al diametro BD, descritto il circolo perpendicolare al circolo $ABCD$; e su questo circolo perpendicolare si costruisca un cono con il vertice nel punto A; si prolunghi la superficie laterale di questo cono e si seghi con un piano per C parallelo alla sua base; la sezione sarà un circolo perpendicolare ad AC, di diametro EF. Su

---

duce « suo loco proponemus » (cioè, a suo luogo ne daremo) come, se ARCHIMEDE avesse avuto l'intenzione di ripetere, in questa lettera, la dimostrazione già esposta nell'opuscolo citato. Ora, mi pare difficile sostenere questo; credo invece che con quel verbo egli abbia semplicemente voluto indicare l'opportunità e la necessità di ricercare una dimostrazione geometrica. Con la traduzione che ho preferita credo di non essermi allontanato dall'interpretazione letterale e insieme di aver superato l'accennata difficoltà. Cfr. anche la traduzione dell'HEATH (p. 419 della traduzione tedesca).

([1]) Cfr. *Sulla sfera e sul cilindro*, I, 34 e *Corall.*

quest'ultimo circolo si descriva un cilindro con l'asse uguale ad AC; e siano EL, FG i lati del cilindro. Si prolunghi poi CA, e si faccia AH ad essa uguale, e si consideri CH come il giogo di una bilancia, di cui A sia il punto di mezzo.

Si conduca una retta MN parallela a BD, la quale seghi il circolo $ABCD$ nei punti O, P, il diametro AC

in S, la retta AE in Q, la retta AF in R. S'innalzi sulla stessa retta MN un piano perpendicolare ad AC; questo piano segherà il cilindro secondo un circolo di diametro MN, e la sfera $ABCD$ secondo un circolo di diametro OP, e il cono secondo un circolo di diametro QR.

Ora, poichè

$$\text{rett. } (CA,\ AS) = \text{rett. } (MS,\ SA)$$

per essere

$$AC = SM, \quad AS = AS,$$

e

$$\begin{aligned} \text{rett. } (CA, AS) &= \text{quadr. } (AO) \\ &= \text{quadr. } (OS) + \text{quadr. } (SQ) \, ; \end{aligned}$$

sarà per conseguenza

$$\text{rett. } (MS, SQ) = \text{quadr. } (OS) + \text{quadr. } (SQ) \, .$$

E poichè

$$CA : AS = MS : SQ$$

ed è

$$CA = AH \, ,$$

segue che

$$\begin{aligned} HA : AS &= MS : SQ \\ &= \text{quadr. } (MS) : \text{rett. } (MS, SQ). \end{aligned}$$

Ma fu dimostrato che

$$\text{rett. } (MS, SA) = \text{quadr. } (OS) + \text{quadr. } (SQ),$$

perciò:

$$AH : AS = \text{quadr. } (MS) : \text{quadr. } (OS) + \text{quadr. } (SQ).$$

D'altra parte

$$\begin{aligned} &\text{quadr. } (MS) : \text{quadr. } (OS) + \text{quadr. } (SQ) = \\ &\qquad = \text{quadr. } (MN) : \text{quadr. } (OP) + \text{quadr. } (QR), \end{aligned}$$

e come il quadrato di MN sta alla somma dei quadrati di OP e di QR, così il circolo nel cilindro di diametro MN sta alla somma del circolo nel cono di diametro QR e del circolo nella sfera di diametro OP; perciò:

$$HA : AS = (\text{circ. nel cilindro}) : (\text{circ. nella sfera}) + (\text{circ. nel cono}).$$

Quindi, il circolo che è nel cilindro, rimanendo al suo posto, farà equilibrio, rispetto al punto A, ad ambedue i circoli che hanno per diametri OP, QR, trasportati e posti in H in modo che il centro di gravità di ciascuno di essi sia H.

Allo stesso modo si potrà dimostrare che, se si conduce nel parallelogrammo LF un'altra retta parallela ad EF, e da questa s'innalza un piano perpendicolare ad AC, il circolo che si ottiene nel cilindro, rimanendo al suo posto, farà equilibrio, rispetto al punto A, a tutti e due i circoli che si ottengono rispettivamente nella sfera e nel cono trasportati e posti sul giogo nel punto H, in modo che il centro di gravità dell'uno e dell'altro sia il punto H.

Così, dunque, riempiuti con tali circoli il cilindro e la sfera e il cono, il cilindro, rimanendo al suo posto, farà equilibrio, rispetto al punto A, a tutti e due insieme la sfera e il cono, trasportati e posti sul giogo nel punto H, in modo che il centro di gravità dell'uno e dell'altra sia H.

Poichè dunque i detti solidi si fanno equilibrio rispetto al punto A, il cilindro rimanendo con il centro

di gravità in K, la sfera e il cono trasportati, com'è detto, con il centro di gravità in H, sarà:

$$HA : AK = \text{cilindro: sfera} + \text{cono } AEF.$$

Ma HA è il doppio di AK; quindi anche

$$\text{cilindro} = 2 \ (\text{sfera} + \text{cono } AEF) .$$

D'altra parte

$$\text{cilindro} = 3 \ (\text{cono } AEF) ;$$

quindi

$$3 \ (\text{cono } AEF) = 2 + (\text{sfera}) + 2 \ (\text{cono } AEF).$$

Si tolgano i due coni comuni; risulta che il solo cono, il cui triangolo per l'asse è AEF, è uguale a due delle sopradette sfere [1].

Ma siccome $EF = 2BD$, si ha

$$\text{cono } AEF = 8 \ (\text{cono } ABD) ;$$

perciò

$$8 \ (\text{cono } ABD) = 2 \ (\text{sfera}).$$

Dunque la sfera, il cui circolo massimo è $ABCD$, è il quadruplo del cono il cui vertice è il punto A e la base il circolo di diametro BD perpendicolare ad AC.

---

[1] Il *triangolo per l'asse* è il triangolo che si ottiene segando il cono con un piano passante per l'asse. La stessa espressione è adoperata in *Sulla sfera e sul cilindro*, I, 16 (*Opp.*, I, 70, 9), ed è ripetuta poco più sotto in questa proposizione e nella seguente prop. 3.

Ora, nel parallelogrammo LF per i punti B, D si conducano le rette VBX, YDZ parallele ad AC, e si consideri il cilindro che ha per basi i circoli di diametri VY, XZ e per asse AC.

Poichè

$$\text{cilindro } VZ = 2 \text{ (cilindro } VD) \text{ [1]}$$

e

$$\text{cilindro } VD = 3 \text{ (cono } ABD),$$

come si dimostra negli « Elementi » [2], segue che

$$\text{cilindro } VZ = 6 \text{ (cono } ABD).$$

Ma fu dimostrato che dello stesso cono ABD è quadrupla la sfera che ha per circolo massimo $ABCD$; quindi il cilindro è una volta e mezzo più grande della sfera; come si doveva dimostrare [3].

Conosciuta questa proposizione, cioè che ogni sfera è quattro volte maggiore del cono che ha per base il circolo massimo e l'altezza uguale al raggio della sfera, mi venne

---

[1] Letteralmente: « il cilindro, il cui parallelogrammo per l'asse è VZ, . . . VD ». Il *parallelogramma per l'asse* è il parallelogrammo che si ottiene segando il cilindro con un piano per l'asse. La stessa espressione è ripetuta poco più sotto in questa proposizione, e nella prop. 3.

[2] Cioè, negli *Elementi* di Euclide, XII. 10. Heiberg crede che questa frase sia interpolata. In tutti gli scritti archimedei si hanno due sole citazioni esplicite degli *Elementi* di Euclide; in *Sulla sfera e sul cilindro*, I, 2 (« per la 2ª del I libro di Euclide ») e 6 (negli *Elementi* riferendosi alla XII. 2).

[3] Evidentemente questa solenne clausola) è un'interpolazione; Archimede infatti ha già dichiarato che questo procedimento non costituisce una dimostrazione.

in mente che la superficie di ogni sfera fosse quattro volte maggiore di quella di un circolo massimo della sfera; e precisamente, come ogni circolo è uguale ad un triangolo che ha per base la circonferenza del circolo e l'altezza uguale al raggio del circolo [1], così supposi che ogni sfera fosse uguale ad un cono avente per base la superficie della sfera e l'altezza uguale al raggio della sfera [2].

---

[1] Cfr. *Misura del cerchio*, prop. I.

[2] Se R è il raggio della sfera, C l'area di un suo cerchio massimo, per la proposizione esposta si ha, indicando con V il volume

della sfera $V = 4 + C \frac{R}{3}$.

Per l'ipotesi qui accennata, si può porre $V = S \frac{R}{3}$

dove S indica la superficie della sfera. Risulta dunque

$$S \frac{R}{3} = 4 \, C \frac{R}{3}; \text{ cioè } S = 4 \, C.$$

A questo passo abbiamo già accennato nei preliminari. ZEUTHEN si mostra propenso a interpretarlo come se volesse significare che ARCHIMEDE non aveva ancora trovato, quando scriveva il *Metodo*, la nuova dimostrazione per la superficie della sfera data in *Sulla sfera e sul cilindro*, I, 33; e quindi ne prende motivo per affermare la probabilità che questo trattato sia posteriore al *Metodo*, e avanza l'ipotesi che la determinazione del volume della sfera sia stata fatta da qualcuno dei predecessori di ARCHIMEDE. Il ragionamento di ZEUTHEN in questo caso sembra un pò troppo artificioso e fondato su troppe congetture mentre più naturale sembra, adesso, ritenere che qui ARCHIMEDE voglia in modo speciale indicare come *per la prima volta* acquistò notizia della superficie della sfera, senza pregiudicare con questo vago accenno la questione cronologica degli scritti.

III.

(Volume dell'ellissoide di rotazione).

Con lo stesso metodo si può anche vedere questo, che:

il cilindro avente la base uguale al cerchio massimo d'uno sferoide (ellissoide di rotazione) e l'altezza uguale all'asse dello sferoide è una volta e mezzo più grande dello sferoide.

Ciò apparirà chiaro quando si sarà visto che:

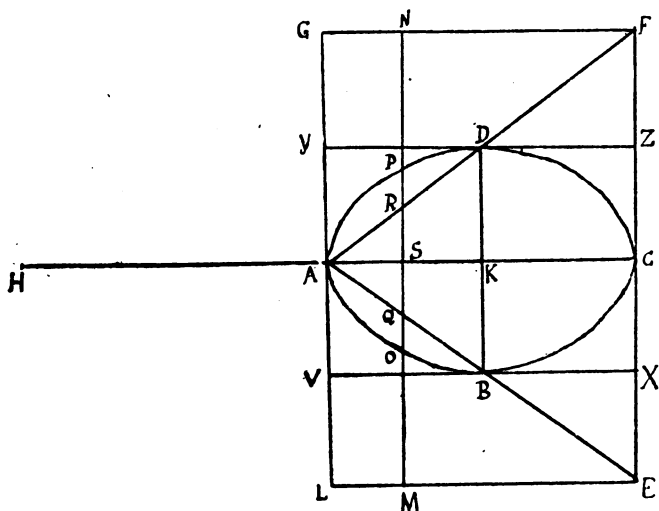
se si sega uno sferoide con un piano passante per il centro e perpendicolare all'asse, la metà dello sferoide è il doppio del cono avente la stessa base del segmento (cioè, della metà dello sferoide) e lo stesso asse [1].

Sia dato, infatti, uno sferoide, e si seghi con un piano passante per l'asse; sia l'intersezione di questo piano con la superficie dello sferoide la sezione di cono acutangolo [2] $ABCD$, che ha per diametri AC, BD e per centro K. Sia ancora nello sferoide il circolo di diametro BD, perpendicolare ad AC, e si consideri il cono che ha per base il

---

[1] Questa seconda prop. è dimostrata in *Sui conoidi e sugli sferoidi*, 27.

[2] La *sezione di cono acutangolo* è l'ellisse. Che la sezione di un ellissoide con un piano per l'asse (o parallelo all'asse) sia un'ellisse è detto esplicitamente in *Sui conoidi*, ecc., 11; ma senza dimostrazione.

detto circolo e per vertice il punto A; si prolunghi la superficie laterale di questo cono e si seghi con un piano per C parallelo alla sua base; la sezione sarà un circolo perpendicolare ad AC, di diametro EF. Si costruisca inoltre un cilindro avente per base lo stesso circolo di diametro EF e per asse la retta AC; prolungata poi la retta AC, si faccia AH ad essa uguale, e si consideri HC

come il giogo di una bilancia, di cui A sia il punto di mezzo.

Nel parallelogrammo LF si conduca una retta MN parallela ad EF, e da MN s'innalzi un piano perpendicolare ad AC; questo piano segherà il cilindro secondo un circolo di diametro MN, e lo sferoide secondo un circolo di diametro OP, e il cono secondo un circolo di diametro QR.

Ora, siccome

$$CA : AS = EA : AQ$$
$$= MS : SQ \,,$$

e $CA = AH$, segue che

$$HA : AS = MS : SQ.$$

D'altra parte

$$MS : SQ = \text{quadr. } (MS) : \text{rett. } (MS.\ SQ)$$
$$\text{rett. } (MS\ .\ SQ) = \text{quadr. } (QS) + \text{quadr. } (SO).$$

Infatti, poichè

$$\text{rett. } (AS.\ SC) : \text{quadr. } (SO) = \text{rett. } (AK.\ KC) : \text{quadr. } (KB)$$
$$= \text{quadr. } (AK) : \text{quadr. } (KB),$$

giacchè ambedue questi rapporti sono uguali al rapporto fra il lato trasverso e il lato retto ([1]), e poichè

$$\text{quadr. } (AK) : \text{quadr. } (KB) = \text{quadr. } (AS) : \text{quadr. } (SQ)\,,$$

sarà, permutando:

$$\text{quadr. } (AS) : \text{rett. } (AS\ .\ SC) = \text{quadr. } (QS) : \text{quadr. } (SO).$$

([1]) Il *lato trasverso* (ἡ πλαγία, o ἡ πλαγία διάμετρος) e il *lato retto* (ἡ ὀρθία o ἡ ὀρθία πλευρά) di una conica a centro sono rispettivamente l'*asse trasverso* (= 2 a), e il *doppio parametro* (= 2 p); il loro rapporto per il caso dell'ellisse è $\frac{p}{a}$. La pro-

Ma

$$\text{quadr.}\,(AS):\text{rett.}\,(AS\,.\,SC)=\text{quadr.}\,(SQ):\text{rett.}\,(SQ.\,QM),$$

quindi

$$\text{rett.}\ (SQ\,.\,QM)=\text{quadr.}\ (OS)\ .$$

Si aggiunga ad ambedue i membri il quadrato di QS; risulta:

$$\text{rett.}\ (MS\,.\,SQ)=\text{quadr.}\ (QS)+\text{quadr.}\ (SO)\ .$$

Quindi

$$HA:AS=\text{quadr.}\ (MS):\text{quadr.}\ \ (QS)+\text{quadr.}\ (SO)\ .$$

Ma come il quadrato di MS sta alla somma dei quadrati di OS e di SQ, così il circolo nel cilindro, che ha per diametro MN, sta alla somma dei due circoli che hanno per diametri OP, QR; cosicchè, rispetto al punto A, il circolo che ha per diametro MN, rimanendo al suo posto, farà equilibrio ad ambedue i circoli che hanno per dia-

---

prietà qui adoperata da ARCHIMEDE equivale dunque all'equazione

$$y^2=\frac{p}{a}\,x\,(2\,a-x).$$

riferita all'asse e alla tangente in un estremo dell'asse stesso, come è facile verificare. Ma qui bisogna osservare che i termini πλαγία e ὀρθία furono introdotti più tardi da APOLLONIO (che dimostrò l'accennata proprietà in *Conic.*, I, 21); onde è opinione di HEIBERG che ARCHIMEDE si fosse espresso con parole diverse, e che la frase che si legge ora nel testo sia stata interpolata.

metri OP, QR, trasportati e posti sul giogo in H, in modo che il centro di gravità di ciascuno di essi sia H.

Ora, di tutti e due i circoli che hanno per diametri OP, QR, trasportati, il centro di gravità è H [e del circolo di diametro MN il centro di gravità è S]; perciò

$$HA : AS = (\text{circ. di diam. } MN) : (\text{circ. diam. } OP + \text{circ. diam. } QR) .$$

Allo stesso modo si potrà dimostrare che, se si conduce nel parallelogrammo LF un'altra retta parallela ad EF, e da questa retta s'innalza un piano perpendicolare ad AC, il circolo che si ottiene nel cilindro, rimanendo al suo posto, farà equilibrio, rispetto al punto A, a tutti e due i circoli che si ottengono rispettivamente nello sferoide e nel cono, trasportati nel punto H del giogo, in modo che il centro di gravità di ciascuno di essi sia H.

Così, dunque riempiuti con tali circoli il cilindro e lo sferoide e il cono, il cilindro, rimanendo al suo posto, sarà in equilibrio, rispetto al punto A, con lo sferoide e con il cono trasportati e posti sul giogo nel punto H, in modo che il centro di gravità dell'uno e dell'altro sia H.

Ora, K è il centro di gravità del cilindro (*lem.* 8), H è il centro di gravità comune allo sferoide e al cono, come fu detto; perciò:

$$HA : AK = \text{cilindro} : \text{sferoide} + \text{cono } AEF$$

Ma $AH = 2AK$; quindi anche

$$\begin{aligned} \text{cilindro} &= 2\,(\text{sferoide} + \text{cono } AEF) \\ &= 2\,(\text{sferoide}) + 2\,(\text{cono } AEF). \end{aligned}$$

D'altra parte

$$\text{cilindro} = 3\ (\text{cono } AEF);$$

quindi

$$3\ (\text{cono } AEF) = 2\ (\text{cono } AEF) + 2\ (\text{sferoide})\ .$$

Si tolgano i due coni comuni; risulta

$$\text{cono } AEF = 2\ (\text{sferoide})$$

Ma

$$\text{cono } AEF = 8\ (\text{cono } ABD)\ ;$$

perciò

$$8\ (\text{cono } ABD) = 2\ (\text{sferoide})\ ,$$

e

$$4\ (\text{cono } ABD) = \text{sferoide}.$$

Dunque, lo sferoide è il quadruplo del cono, il cui vertice è il punto A e la base il circolo di diametro BD perpendicolare ad AC;
e la metà dello sferoide è doppio del detto cono.

Si conducano per i punti B, D nel parallelogrammo LF le rette VX, YZ parallele ad AC, e si consideri il cilindro le cui basi sono i circoli, che hanno per diametri VY, XZ, e il cui asse è la retta AC.

Ora, poichè

$$\text{cilindro } VZ = 2\ (\text{cilindro } VD)\ ,$$

essendo le loro basi uguali e l'asse del primo doppio dell'asse del secondo, e poichè il cilindro VD è triplo del

cono, che ha per vertice il punto A e per base il circolo di diametro BD perpendicolare ad AC, segue che

$$\text{cilindro } VZ = 6 \text{ (cono } ABD).$$

Ma fu dimostrato che

$$4 \text{ (cono } ABD) = \text{sferoide};$$

quindi

$$\text{cilindro } VZ = \frac{3}{2} \text{ (sferoide)};$$

[c. d. d.].

IV.

(Volume di un segmento di paraboloide di rotazione).

Ogni segmento di un conoide rettangolo (paraboloide di rotazione), tagliato da un piano perpendicolare all'asse, è una volta e mezzo più grande del cono, che ha la stessa base e la stessa altezza del segmento [1].

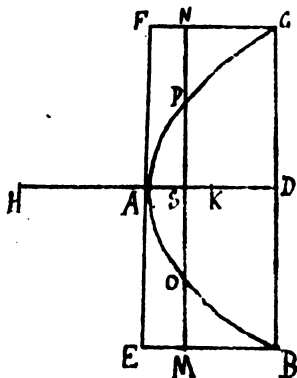
Ciò si può vedere con questo metodo nel modo seguente:

Sia dato, infatti, un conoide rettangolo, e si seghi con un piano passante per l'asse; sia l'intersezione di questo piano con la superficie del conoide la sezione di cono rettangolo ABC [2]. Si seghi inoltre con un secondo piano

---

[1] Cfr. *Sui conoidi*, ecc., 21.

[2] Cioè « la parabola $A\ B\ C$ ». Per le intersezioni dei diversi conoidi con un piano per l'asse, o parallelo all'asse, o perpendicolare all'asse, vedasi *Sui conoidi*, ecc., 11.

perpendicolare all'asse e sia BC l'intersezione comune dei due piani. L'asse del segmento (del conoide) sia DA; si prolunghi DA fino in H, in modo che sia $AH = DA$, e si consideri DH come il giogo di una bilancia, di cui A sia il punto di mezzo. La base del segmento sia il circolo di diametro BC perpendicolare ad AD, e si consideri il cono, che ha per base il circolo di diametro BC e per vertice il punto A; sia inoltre un cilindro avente per base il circolo di diametro BC e per asse AD.

Nel parallelogrammo EC si conduca una retta MN parallela a BC, e da MN s'innalzi un piano perpendicolare ad AD; questo piano segherà il cilindro secondo un circolo di diametro MN, e il segmento del conoide rettangolo secondo un circolo di diametro OP.

Ora, poichè BAC è una sezione di cono rettangolo, AD il suo diametro, e OS, BD sono due ordinate, si ha

$$DA : AS = \text{quadr. } (BD) : \text{quadr. } (OS) \text{ [1]}.$$

Ma è $DA = AH$ (e $BD = MS$) ; per conseguenza

$$HA : AS = \text{quadr. } (MS) : \text{quadr. } (SO).$$

[1] Ved. nota a pag. 114 Questa proprietà è ricordata anche in *Quadratura della parabola*, 3; per la sua dimostrazione si rimanda agli *Elementi* (di ARISTEO o EUCLIDE). APOLLONIO la dimostrò in *Conic.*, I, 20.

D'altra parte, come il quadrato di MS sta al quadrato di SO, così il circolo nel cilindro, che ha per diametro MN, sta al circolo nel segmento del conoide rettangolo, che ha per diametro OP; perciò:

$$HA : AS = (\text{circ. diam. } MN) : (\text{circ. diam. } OP) .$$

Quindi il circolo di diametro MN, che è nel cilindro, rimanendo al suo posto, farà equilibrio, rispetto al punto A, al circolo di diametro OP, trasportato e posto sul giogo in H, in modo che il suo centro di gravità sia H; infatti, il centro di gravità del circolo di diametro MN è S (*lem.* 7), e il centro di gravità del circolo di diametro OP, trasportato, è H, e si ha la proporzionalità inversa:

$$HA : AS = (\text{circ. diam. } MN) : (\text{circ. diam. } OP) .$$

Allo stesso modo si potrà dimostrare che, se si conduce nel parallelogrammo EC un'altra retta parallela a BC, e da questa retta s'innalza un piano perpendicolare ad AH, il circolo che si ottiene nel cilindro, rimanendo al suo posto, farà equilibrio, rispetto al punto A, al circolo che si ottiene nel segmento del conoide rettangolo trasportato sul giogo in H, in modo che il suo centro di gravità sia H.

Così dunque riempiuti il cilindro e il segmento del conoide rettangolo, il cilindro, rimanendo al suo posto, farà equilibrio, rispetto al punto A, al segmento del conoide rettangolo trasportato e posto sul giogo in H, in modo che il suo centro di gravità sia H.

Allora, poichè le dette grandezze si fanno equilibrio rispetto al punto A, e il centro di gravità del cilindro è K, essendo la retta AD divisa per metà dal punto K (*lem.* 8), e il centro di gravità del segmento trasportato è H, si avrà la proporzionalità inversa

$$HA : AK = \text{cilindro} : \text{segmento}.$$

Ma

$$HA = 2AK\,;$$

quindi anche

$$\text{cilindro} = 2\ (\text{segmento}).$$

D'altra parte, lo stesso cilindro è triplo del cono che ha per base il circolo di diametro BC e per vertice il punto A ; è chiaro dunque che

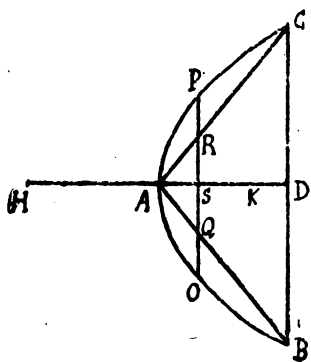
$$\text{segmento} = \frac{3}{2}\,(\text{cono } ABC)\,.$$

V.

Centro di gravità di un segmento di paraboloide di rotazione.

Il centro di gravità del segmento di un conoide rettangolo (paraboloide di rotazione), determinato da un piano perpendicolare all'asse, è situato sulla retta che è l'asse del segmento, nel punto che divide la retta stessa in modo che la parte verso il vertice sia il doppio dell'altra parte.

Ciò si può vedere con questo metodo nel modo seguente:

Sia dato un segmento di conoide rettangolo determinato da un piano perpendicolare all'asse; si tagli questo segmento con un secondo piano passante per l'asse, che seghi la superficie (del conoide) secondo la sezione di cono rettangolo ABC; sia BC l'intersezione comune del piano che ha determinato il segmento e del piano secante; la retta AD sia l'asse del segmento e il diametro della sezione ABC. Sul prolungamento della AD si prenda $AH = AD$, e si consideri DH come il giogo di una bilancia, di cui A sia il punto di mezzo. Sia inoltre inscritto nel segmento un cono, che abbia per lati BA, AC, e si conduca nella sezione di cono rettangolo una retta OP parallela a BC, la quale intersechi la sezione stessa nei punti O, P, e i lati del cono nei punti Q, R.

Ora, poichè, nella sezione di cono rettangolo, le rette OS, BD sono perpendicolari al diametro, si ha:

$$DA : AS = \text{quadr. } (BD) : \text{quadr. } (OS).$$

D'altra parte,

$$DA : AS = BD : QS ;$$

$$BD : QS = \text{quadr. } (BD) : \text{rett. } (BD,\ QS) ;$$

per conseguenza

$$\text{quadr. } (BD) : \text{quadr. } (OS) = \text{quadr. } (BD) : \text{rett. } (BD, QS),$$

e quindi

$$\text{quadr. } (OS) = \text{rett. } (BD, QS) .$$

Sono dunque proporzionali BD, SO, SQ [1], e perciò è

$$BD : QS = \text{quadr. } (OS) : \text{quadr. } (SQ) .$$

Ma

$$BD : QS = DA : AS$$
$$= HA : AS ,$$

e quindi anche

$$HA : AS = \text{quadr. } (OS) : \text{quadr. } (SQ) .$$

Da OP s'innalzi un piano perpendicolare ad AD; questo piano segherà il segmento del conoide rettangolo secondo il circolo di diametro OP, e il cono secondo il circolo di diametro QR.

E poichè

$$HA : AS = \text{quadr. } (OS) : \text{quadr. } (SQ)$$

e

$$\text{quadr.} (OS) : \text{quadr.} (SQ) = (\text{circ. diam.} OP) : (\text{circ. diam.} QR);$$

---

[1] Cfr. EUCLIDE, VI, 17: « Se tre rette [a, b, c,] sono proporzionali [$a : b = b : c$] il rettangolo formato dai termini estremi è uguale al quadrato del medio e se il rettangolo formato dei termini estremi è uguale al quadrato del medio, le tre rette sono proporzionali ». Secondo la def. 9 del lib. V, se tre rette sono proporzionali, si ha $a : c = a^2\ b^2$

segue che

$$HA : AS = (\text{circ. diam. } OP) : (\text{circ. diam. } QR) .$$

Perciò il circolo di diametro OP, rimanendo al suo posto, farà equilibrio, rispetto al punto A, al circolo di diametro QR, trasportato nel punto H del giogo, in modo che il suo centro di gravità sia H. Cioè, il centro di gravità del circolo di diametro OP, che rimane al suo posto, è S (*lem.* 7), e il centro di gravità del circolo di diametro QR trasportato, come fu detto, è H, e si ha la proporzionalità inversa

$$HA : AS = (\text{circ. diam. } OP) : (\text{circ. diam. } QR) ;$$

perciò i due circoli si faranno tra loro equilibrio rispetto al punto A.

Allo stesso modo si potrà anche dimostrare che, se si conduce nella sezione di cono rettangolo un'altra retta parallela a BC, e da questa s'innalza un piano perpendicolare ad AD, il circolo che si ottiene nel segmento del conoide rettangolo, rimanendo al suo posto, farà equilibrio, rispetto al punto A, al circolo che si ottiene nel cono, trasportato e posto nel punto H del giogo, in modo che il suo centro di gravità sia H.

Così, dunque, riempiuti con tali circoli e il segmento e il cono, tutti i circoli del segmento, rimanendo al loro posto, faranno equilibrio, rispetto al punto A, a tutti i circoli del cono trasportati e posti sul giogo in H, in modo che il loro centro di gravità sia H.

E perciò anche il segmento del conoide rettangolo, rimanendo al suo posto, farà equilibrio, rispetto al punto A, al cono trasportato e posto sul giogo in H, in modo che il suo centro di gravità sia H.

Ma poichè il centro di gravità di tutt'e due le grandezze, riunite in una sola grandezza, è A, mentre il centro di gravità del cono trasportato è H, segue che (*lem.* 2) il centro di gravità dell'altra grandezza (cioè, del segmento) è sulla retta AH prolungata dalla parte di A di un segmento AK tale che

$$AH : AK = \text{segmento} : \text{cono}.$$

Ma

$$\text{segmento} = \frac{3}{2}\,\text{cono} \qquad \text{(prop. IV)}$$

perciò anche

$$HA = \frac{3}{2} AK.$$

Cioè, il centro di gravità del conoide rettangolo è il punto K, che divide la AD in modo che la parte di essa verso il vertice del segmento sia doppia della parte restante [1].

---

[1] La determinazione del centro di gravità di un segmento di paraboloide non si ritrova in nessuna delle opere a noi giunte di ARCHIMEDE. Esso però è adoperato direttamente e indirettamente in tutto il libro II: *Sui Corpi galleggianti*. Nella proposizione 2 (*Opera*, II, 150, 14 sg.), dice espressamente: « è dimostrato nel libro *Sugli equilibri* che il centro di gravità di un segmento di

VI.

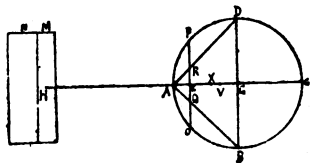
(Centro di gravità di un emisfero).

Il centro di gravità di un emisfero è situato sulla retta, che è il suo asse, in un punto che divide la retta stessa in modo che la parte verso la superficie dell'emisfero con la parte restante abbia un rapporto uguale al rapporto di 5 a 3.

Sia data una sfera e si tagli con un piano passante per il centro, e sia l'intersezione di questo piano con la superficie (sferica) il circolo $ABCD$; siano AC, BD due diametri del circolo perpendicolari fra loro; da BD s'innalzi un piano perpendicolare ad AC, e si costruisca il cono avente per base il circolo di diametro BD, per vertice il punto A, e per lati AB, AD. Si prolunghi CA e si faccia $AH = CA$, e si consideri la retta HC come il giogo di una bilancia, di cui A sia il punto di mezzo.

---

conoide rettangolo è situato sull'asse, nel punto che lo divide in modo che la parte dell'asse verso il vertice sia doppia dell'altra parte ». Questo teorema fu in seguito dimostrato nel secolo XVI da COMMANDINO, MAUROLICO, LUCA VALERIO, accostandosi specialmente gli ultimi due assai strettamente al metodo Archimedeo. ZEUTHEN nel 1886 (*Die Lehre der Kegelschnitten*, pag. 453) indicò un procedimento che coincide perfettamente con quello esposto nella presente proposizione. Questo testimonia ancora una volta la felice perspicacia dell'illustre storico e la rigorosa esattezza con cui egli tentava la ricostruzione della matematica greca.

Nel semicerchio BAD si conduca una retta OP parallela a BD, che intersechi la semicirconferenza nei punti O, P, i lati del cono nei punti Q, R, e la retta AC nel punto E. Da OP s'innalzi un piano perpendicolare ad AE;

questo piano segherà l'emisfero secondo il circolo di diametro OP, e il cono secondo il circolo di diametro QR.

Ora, poichè:

$$AC : AE = \text{quadr. } (OA) : \text{quadr. } (AE)\ ,$$

e

$$\text{quadr. } (OA) = \text{quadr. } (AE) + \text{quadr. } (EO),$$

$$AE = EQ\ ;$$

segue che

$$AC : AE = \text{quadr. } (OE) + \text{quadr. } (EQ) : \text{quadr. } (EQ).$$

D'altra parte,

$$\text{quadr. } (OE) + \text{quadr. } (EQ) : \text{quadr. } (EQ) =$$
$$= (\text{circ. diam. } OP + \text{circ. diam. } QR) : (\text{circ. diam. } QR),$$

e

$$CA = AH\ ;$$

quindi

$$HA : AE = (\text{circ. diam. } OP + \text{circ. diam. } QR) : (\text{circ. diam. } QR).$$

Quindi i due circoli, che hanno per diametri OP, QR, rimanendo al loro posto, faranno equilibrio, rispetto al punto A, al circolo di diametro QR, trasportato e posto in H, in modo che il suo centro di gravità sia H.

Ma poichè il centro di gravità di tutti e due i circoli, che hanno per diametri OP, QR, situati al loro posto [1] è E (*lem.* 7), e il centro di gravità del circolo di diametro QR, trasportato, è H, si ha

$$EA : AH = (\text{circ. diam. } QR) : (\text{circ. diam. } OP + \text{circ. diam. } QR) .$$

Allo stesso modo si potrà anche dimostrare che, se si conduce nel semicerchio [2] un'altra parallela alla BGD, e da questa s'innalza un piano perpendicolare ad AC, tutti e due i circoli che si ottengono nell'emisfero e nel cono, rimanendo al loro posto, faranno equilibrio, rispetto al punto A, al circolo che si ottiene nel cono, trasportato e posto nel punto H del giogo.

Così dunque, riempiuti con circoli e l'emisfero e il cono, tutti i circoli dell'emisfero e del cono, rimanendo al loro posto, faranno equilibrio, rispetto al punto A, a tutti i circoli del cono trasportati e posti nel punto H del giogo, in modo che il loro centro di gravità sia H.

---

(1) Le linee segmenti sono di lettura assai incerta, e sono state restituite da Heiberg.

(2) Qui Heiberg ha letto ἐν τῇ τοῦ ὀρθογωνίου κώνου τομῇ (cioè « nella sezione di cono rettangolo »), che evidentemente è errata, e perciò da sostituire « nel semicerchio ».

[Ora ([1]), si sospenda in H il cilindro $M + N$, uguale al cono ABD, e si tagli con un piano perpendicolare all'asse, in modo che il cilindro M solo faccia equilibrio, rispetto al punto A, al cono.

Si prenda su AG un punto V tale che sia $AV = 3VG$; sarà V il centro di gravità del cono (*lem.* 10). Si prenda, poi, un altro punto X tale che si abbia

$$AG : AX = 8 : 5\ , \text{ ossia } XG : AX = 3 : 5.$$

Allora, poichè il cilindro M fa equilibrio, rispetto al punto A, al cono ABD, si avrà:

$$\begin{aligned} \text{cilindro } M : \text{ cono } ABD &= VA : HA \\ &= \frac{3}{4} AG : 2AG \\ &= 3 : 8\ . \end{aligned}$$

Ma

$$\text{cono } ABD = \text{cilindro } M + N\ ,$$

quindi

$$\text{cilindro } M + N : \text{cilindro } M = 8 : 3\ ;$$

da cui

$$\text{cilindro } N : \text{cilindro } M + N = 5 : 8\ ,$$

cioè

$$\text{cono } ABD : \text{cilindro } N = AG : AX].$$

([1]) In questo punto il testo diventa illegibile. La lacuna si può colmare, come ha indicato ZEUTHEN, seguendo le traccie della prop. IX e le indicazioni della figura. Con tali criteri la parte mancante fu restituita da REINACH e da HEIBERG.

Ricordando che la sfera è quadrupla del cono che ha per base il circolo di diametro BD e per asse AG (prop. II), [sarà

$$\text{emisfero} : \text{cono } ABD = 2 : 1 = AH : AG\,,$$

e cioè (per la precedente):

$$\text{emisfero: cilindro } N = AH : AX.$$

Quindi il cilindro N, che ha per centro di gravità H, fa equilibrio, rispetto al punto A, all'emisfero.

Dunque, il centro di gravità dell'emisfero è il punto X, il quale divide l'asse in modo che la parte verso la superficie dell'emisfero con la parte rimanente ha un rapporto uguale al rapporto di 5 a 3].

L'ultima parte della prop. si riduce a questo:

Siccome (lin...) il cono ABD sospeso in H fa equilibrio al cono e all'emisfero insieme situati al loro posto, basta determinare la parte del cono in H che fa equilibrio al cono situato al suo posto.

Ciò è facile determinare, conoscendo il centro di gravità del cono ABD; e si trova facilmente che essa è i $\frac{3}{8}$ del cono ABD.

Perciò gli altri $\frac{5}{8}$ faranno equilibrio all'emisfero.

Onde

$$\frac{5}{8}\,(\text{cono})\,.\,AH = AX\ \ (\text{emisfero}).$$

Ma

$$\text{cono} = \frac{1}{2}\ (\text{emisfero});$$

quindi

$$AX = \frac{5}{8} . AG .$$

Si poteva anche arrivare facilmente alla stessa conclusione applicando il lemma 2°.

Per quanto fu detto più sopra si ha

$$\begin{aligned} AH \text{ (cono } ABD) &= AX \text{ (emisfero + cono)} \\ &= AX . 3 \text{ (cono)} ; \end{aligned}$$

da cui

$$AX = AH : 3 = \frac{2}{3} . AG .$$

Ora per il lemma ricordato è

$$\begin{aligned} \frac{2}{3} . AG - AX : \frac{3}{4} . AG - \frac{2}{3} . AG &= \text{cono : emisfero} \\ &= 1 : 2 ; \end{aligned}$$

e perciò

$$AX = \frac{5}{8} . AG .$$

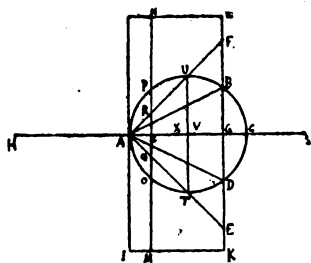
VII.

(Volume di un segmento sferico).

Con questo metodo si può anche vedere che:

Il rapporto fra un segmento sferico (a una sola base) e il cono avente la stessa base del segmento e lo stesso asse è uguale al rapporto fra la somma del raggio della

sfera con l'altezza del segmento supplementare e l'altezza di questo segmento supplementare ([1]).

[Sia una sfera, e in essa il circolo massimo *ABCD*, e i diametri *AC*, *TU*, tra loro perpendicolari; si seghi la sfera con un piano perpendicolare ad *AC*, il quale determini il segmento sferico avente per base il circolo di diametro *BD*; sia *G* il punto d'intersezione tra *BD* e *AC*.

Si costruisca il cono avente per base il circolo di diametro *BD* e per vertice li punto *A*. Si costruisca, poi, un secondo cono avente per base il circolo di diametro *TU* e per vertice lo stesso punto *A* ; si prolunghi la superficie laterale di questo secondo cono e si seghi con un piano per *BD* parallelo alla sua base; la sezione sia il circolo di diametro *EF*. Nello stesso piano con centro in *G* e raggio

([1]) Qui il ms. presenta una lacuna. Per l'enunciato cfr. *Sulla sfera e sul cilindro* II. 2 e *Coroll.* Le altre linee mancanti non dovevano contenere che la descrizione della figura; e si completano quindi facilmente con le indicazioni della figura stessa e con l'analogia che tale prop. ha con le prop. II.

uguale ad AC si costruisca il circolo di diametro KL, e si consideri il cilindro che ha per base questo circolo e per asse AG.

Si prolunghi AC, oltre C di un segmento CZ uguale al raggio della sfera, e oltre A del segmento $AH = AC$, e si consideri CH come il giogo di una bilancia, di cui A sia il punto di mezzo.

Nel parallelogrammo IL si conduca una retta MN parallela a BD]

e da MN s'innalzi un piano perpendicolare ad AC; questo piano intersecherà il cilindro secondo il circolo di diametro MN, e il segmento sferico secondo il circolo di diametro OP, e il cono, che ha per base il circolo di diametro EF e per vertice il punto A, secondo il circolo di diametro QR.

Come in un caso precedente (cfr. prop. II) si dimostrerà che il circolo di diametro MN, rimanendo al suo posto, farà equilibrio, rispetto al punto A, a tutti e due i circoli che hanno per diametri OP, QR, trasportati nel punto H del giogo, in modo che il centro di gravità dell'uno e dell'altro sia H.

E così ugualmente per ogni altro circolo.

Riempiuti dunque con circoli e il cilindro e il cono e il segmento sferico, il cilindro, rimanendo al suo posto, farà equilibrio a tutti e due insieme il cono e il segmento sferico, trasportati e posti nel punto H del giogo.

Si tagli ora AG nei punti V, X in modo che sia

$$AX = XG, \quad GV = \frac{1}{3} AG .$$

Il punto X sarà il centro di gravità del cilindro, essendo il punto di mezzo dell'asse AG (*lem.* 8).

Poichè dunque le dette grandezze si fanno equilibrio, rispetto al punto A, si avrà

$$\text{cilindro} : (\text{cono } AEF + \text{segm. sferico } BAD) = HA : AX.$$

Inoltre, siccome $GA = 3GV$, è

$$\text{rett. } (CG, GV) = \frac{1}{3} \text{ rett. } (AG, GC).$$

Ma $$\text{rett. } (AG, GC) = \text{quadr. } (GB),$$

perciò anche

$$\text{rett. } (CG, GV) = \frac{1}{3} \text{ quadr. } (BG).$$

[D'altra parte,

$$\text{quadr. } (AG) = 3 \text{ rett. } (AG, GV),$$

e siccome

$$AG : AX = AV : VG = 2 : 1,$$

si ha

$$\text{quadr. } (AG) = 3 \text{ rett. } (AX, AV).$$

Ora, poichè $HA = KG$, $AG = GE$, segue che

$$\text{quadr. } (HA) : \frac{1}{3} \text{ quadr. } (AG) = (\text{cilindro, che ha per base circ. diam. } KL) : \text{cono } AEF.$$

Ma

$$\text{quadr.}\,(HA) : \frac{1}{3}\,\text{quadr.}\,(AG) = \text{quadr.}\,(HA) : \text{rett.}\,(AX, AV);$$

quindi

$$\text{quadr.}\,(HA) : \text{rett.}\,(AX, AV) = \text{cilindro} : \text{cono } AEF].$$

Ma abbiamo dimostrato che è anche

$$HA : AX = \text{cilindro} : (\text{segm. sferico } ABD + \text{cono } AEF).$$

[E siccome $HA = AC = AV + VC$, sarà

$$\text{quadr.}\,(HA) : \text{rett.}\,(AV, AX) + \text{rett.}\,(VC, AX) = \\ = \text{cilindro} : (\text{segm. } ABD + \text{cono } (AEF) ;$$

e quindi

$$\text{quadr.}\,(HA) : \text{rett.}\,(VC, AX) = \text{cilindro} : \text{segmento}.$$

Ma

$$\text{quadr.}\,(HA) : \frac{1}{3}\,\text{quadr.}\,(BG) = \text{cilindro} : \text{cono } ABD \\ = \text{quadr.}\,(HA) : \text{rett.} \\ (CG, GV) ;$$

perciò

$$\text{rett.}\,(VC, AX) : \text{rett.}\,(CG, GV) = \text{segm. sferico } ABD : \\ \text{cono } ABD.$$

Ora, essendo

$$AG = 2AX = AV + VG = 3VG$$
$$VC = VG + GC = \frac{1}{3} AG + GC ,$$

sarà

$$\text{rett.} (VC, AX) = \text{rett.} (\frac{1}{3} AG + \frac{3}{2} VG) + \text{rett.} (GC, \frac{3}{2} VG).$$
$$= \text{rett.} (\frac{1}{2} AC + GC, VG)$$
$$= \text{rett.} (GZ, VG).$$

E quindi finalmente

$$GZ : CG = \text{segm. sferico } ABD : \text{cono } ABD].$$

Il risultato cui giunge Archimede si può riassumere nella formula seguente:

$$\text{segm. sferico } ABD = \frac{(\text{cono } ABD) . GZ}{CG.}$$

Ora ponendo $AC = 2a$, $GC = k$, $GZ = a + k$, e osservando che il quadrato di BG (raggio della base del cono ABD) è $k (2a - k)$, potremo anche scrivere

$$\text{segm. sfer.} = \frac{\frac{1}{3} \pi \; k \; (2 \; a - k)^2 \, (a + k)}{k}$$
$$= \frac{1}{3} \pi \, (2a - k)^2 \; (a + k).$$

Ponendo inoltre $h = 2a - k$, da cui $k + a = 3a - h$, si avrà

$$\text{segm. sfer.} = \frac{1}{3} \pi h^2 (3a - h),$$

che dà il volume cercato in funzione del raggio e dell'altezza.

Allo stesso risultato possiamo dare un'altra forma, introducendo il raggio della base, c.

Si ha

$$c^2 = h (2a - h),$$

da cui

$$a = \frac{c^2 + h^2}{2h}$$

Ponendo questo valore di a nell'ultima formula, si ha

$$\text{segm. sfer.} = \frac{\pi}{6} h (3 c^2 + h^2).$$

Sotto questa forma la regola per calcolare il volume di un segmento sferico a una base ricorre frequentemente negli scritti di ERONE (I sec. a. C.). [Cfr. TANNERY P., *La stéreométrie de Héron d'Alexandrie. Etudes Héroniennes*, in *Mémoires scient.*, I, nn. 27-28; Paris, 1912].

VIII.

(Volume di un segmento d'ellissoide).

Mediante un procedimento simile, con questo stesso metodo si può anche vedere che:

Il rapporto fra il segmento di sferoide determinato da un piano perpendicolare (all'asse) e il cono avente la stessa

base del segmento e lo stesso asse è uguale al rapporto fra la somma del semiasse dello sferoide con l'asse del segmento supplementare e l'asse di questo segmento supplementare [1].

Cioè:
segmento di ellissoide: cono $= a + k : k = 3a - h : 2a - h$.

IX.

(Centro di gravità di un segmento sferico).

Ogni segmento sferico ha il suo centro di gravità sulla retta, che è l'asse del segmento, in un punto che la divide in modo che la parte di essa verso il vertice e la parte rimanente abbiano un rapporto uguale a quello che ha la somma dell'asse del segmento e del quadruplo del segmento supplementare con la somma dell'asse del segmento e del doppio dell'asse del segmento supplementare [2].

[Sia data una sfera, e un piano che la seghi determinando il segmento sferico *BAD*, e un altro piano passante

---

[1] Questa prop. era omessa nella 1ª edizione. La sua dimostrazione completa è data in *Sui Conoidi* ecc., 29, 31, separatamente per il caso di un segmento di sferoide maggiore o minore di un emisfero.

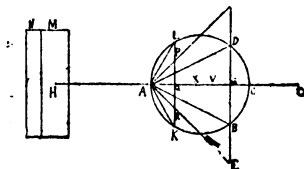
[2] L'enunciato di questa prop. nel ms. è illegibile. Ma si può facilmente ricostruire con l'aiuto di quello della seguente prop. 10, a cui doveva esser simile; con la differenza che in questa si tratta di un segmento sferico, mentre nella 10 di un segmento di ellissoide. Nella 1ª ediz. questa prop. portava il numero VIII. Le prime linee sono anch'esse molto lacunose, ma di facile ricostruzione.

per il centro che intersechi la sfera secondo il circolo $ABCD$]
e il piano, che ha determinato il segmento, nella retta BD. Sia CA il diametro perpendicolare a BD, e incontri BD nel punto G; cosicchè l'asse del segmento, che ha il vertice in A, sarà AG, e GC quello del segmento supplementare.

Si seghi la retta AG in X, in modo che

$$AX : XG = AG + 4GC : AG + 2CG.$$

Dico che X è il centro di gravità del segmento, che ha il vertice nel punto A, . . . [1].

Si prolunghi AC, e si faccia $AH = AC$, e sia CO uguale

al raggio della sfera, e si consideri CH come il giogo di una bilancia, di cui A sia il punto di mezzo.

Nel piano che determina il segmento si descriva un circolo con centro in G e raggio uguale ad AG, e su questo circolo si costruisca un cono con il vertice nel punto A; AE, AF siano i lati di questo cono. Si conduca poi una retta KL parallela ad EF, la quale incontri la perife

[1]. Seguono cinque linee contenenti soltanto traccie di parole.

ria del segmento nei punti K, L, e i lati del cono nei punti R, P, e la retta AC in Q.

Ora, poichè

$$AC : AQ = \text{quadr. } (KA) : \text{quadr. } (AQ) ,$$

e

$$\text{quadr. } (KA) = \text{quadr. } (AQ) + \text{quadr. } (QK)$$
$$\text{quadr. } (AQ) = \text{quadr. } (QP) ,$$

e perchè anche

$$\text{quadr. } (AG = \text{quadr. } (EG) ,$$

segue che

$$CA : AQ = \text{quadr. } (KQ) + \text{quadr. } (QP) : \text{quadr. } (QP) .$$

D'altra parte:

$$\text{quadr. } (KQ) + \text{quadr. } (QP) : \text{quadr. } (QP) =$$
$$= (\text{circ. diam. } KL + \text{circ. diam. } PR) : (\text{circ. diam. } PR),$$

e $$CA = AH ;$$

perciò:

$$HA : AQ = (\text{circ. diam. } KL + \text{circ. diam. } PR) : (\text{circ. diam. } PR).$$

Poichè dunque:

$$(\text{circ. diam. } KL + \text{circ. diam. } PR) : (\text{circ. diam. } PR) =$$
$$= AH : QA ,$$

si trasporti il circolo di diametro PR e si ponga nel punto H

del giogo, in modo che il suo centro di gravità sia H; e allora

HA sta ad AQ come il circolo di diametro KL e quello di diametro PR, rimanendo al loro posto, stanno al circolo di diametro PR trasportato e posto nel punto H del giogo, in modo che il suo centro di gravità sia H; e perciò il circolo del segmento BAD e quello del cono AEF fanno equilibrio, rispetto al punto A, al circolo del cono AEF.

Così parimenti anche tutti i circoli che si possono fare nel segmento BAD e tutti quelli che si possono fare nel cono AEF, rimanendo al loro posto, faranno equilibrio, rispetto al punto A, a tutti i circoli del cono AEF trasportati e posti nel punto H del giogo, in modo che il loro centro di gravità sia H;

e perciò anche il segmento sferico ABD e il cono AEF, rimanendo al loro posto, faranno equilibrio, rispetto al punto A, al cono EAF trasportato e posto nel punto H del giogo, in modo che il suo centro di gravità sia H.

Sia ora il cilindro $M + N$ uguale al cono che ha per base il circolo di diametro EF e per vertice il punto A, e si divida AG in V in modo che sia $AG = 4VG$; il punto V sarà il centro di gravità del cono EAF, come abbiamo premesso (*lemma* 10). Si tagli inoltre il cilindro $M + N$ con un piano perpendicolare (al suo asse), in modo che il solo cilindro M faccia equilibrio al cono EAF.

Allora, poichè il cono EAF e il segmento ABD, rimanendo al loro posto, fanno equilibrio al cono EAF trasportato e posto nel punto H del giogo, in modo che il suo centro di gravità sia H; e poichè il cilindro $M + N$

è uguale al cono EAF, e ciascuno dei cilindri M, N ha il centro di gravità in H [ed il cilindro M fa equilibrio al cono AEF], segue che il cilindro N farà equilibrio, rispetto al punto A, al segmento sferico.

Ora, si ha, come è stato precedentemente dichiarato (prop. VII)

$$(\text{segm. sferico } BAD) : (\text{cono } ABD) = OG : GC.$$

Inoltre,

$$\begin{aligned}\text{cono } BAD : \text{cono } EAF &= (\text{circ. diam. } BD) : (\text{circ. diam. } EF) \\ &= \text{quadr. } (BG) : \text{quadr. } (GE),\end{aligned}$$

ed è anche

$$\text{quadr. } (BG) = \text{rett. } (CG,\ GA)\,;$$

$$\text{quadr. } (GE) = \text{quadr. } (GA).$$

Quindi

$$\text{cono } BAD : \text{cono } EAF = CG : GA\,.$$

Ma fu anche dimostrato che

$$\text{cono } BAD : \text{segmento } BAD = CG : GO\,;$$

perciò *ex aequali* [1]:

$$\text{segmento } BAD : \text{cono } EAF = OG : GA\,.$$

---

[1] Cfr. Euclide, V. 22.

Ancora, poichè

$$AX : XG = CA + 4GC : AG + 2GC,$$

si ha invertendo

$$GX : XA = 2CG + GA : 4CG + GA\ ,$$

e componendo

$$GA : AX = 6CG + 2GA : GA + 4GC\ .$$

Inoltre, com'è facile vedere,

$$GO = \frac{1}{4}(6GC + 2GA)\ ;\ CV = \frac{1}{4}(4GC + GA)\ (^1);$$

perciò

$$GA : AX = GO : CV\ ,$$

e quindi anche

$$OG : GA = CV : XA\ .$$

Fu anche dimostrato che

$$OG : GA = \text{segmento } BAD : \text{cono } EAF\ ,$$

e perciò

$$\text{segmento } BAD : \text{cono } EAF = CV : XA\ .$$

---

[1] Infatti: $GO = GC + \frac{1}{2}\ CA;$

$6GC + 2GA = 4GC + 2CA = 4GO;$

$AG = 4VG,\ 4GC + GA = 4GC + 4VG = 4VC.$

Ora, poichè il cilindro M fa equilibrio, rispetto al punto A, al cono EAF, e il centro di gravità del cilindro è H, quello del cono è V, sarà per conseguenza

$$\begin{aligned} \text{cono } EAF : \text{cilindro } M &= HA : AV \\ &= CA : AV ; \end{aligned}$$

ed essendo cono $EAF =$ cilindro $(M + N)$, si ha dividendo

$$\text{cilindro } (M + N) : \text{cilindro } N = CA : CV .$$

È inoltre

$$\text{cilindro } (M + N) = \text{cono } EAF ;$$

quindi

$$\begin{aligned} \text{cono } EAF : \text{cilindro } N &= CA : CV \\ &= HA : CV. \end{aligned}$$

Ma fu dimostrato che

$$\text{segmento } BAD : \text{cono } EAF = CV : XA ;$$

quindi *ex aequali* sarà

$$\text{segmento } BAD : \text{cilindro } N = HA : AX .$$

Fu anche dimostrato che il segmento BAD fa equilibrio al cilindro N, rispetto al punto A, e il centro di gravità del cilindro N è H; quindi anche il centro di gravità del segmento BAD è il punto X.

Alla linea 16 sg. della pag. 153 è concluso che:

$$\textit{momento}\ (\text{cono } EAF + \text{segm. } ABD) = AH \,.\, (\text{cono } EAF)\,.$$

Il ragionamento che segue si può brevemente riassumere così:

Si pongano con il centro di gravità in H i due cilindri M, N, tali che $M + N =$ cono EAF, e il cilindro M faccia da solo equilibrio al cono EAF.

Poichè

$$\text{cono } EAF : \text{cil. } M = CA : AV\,, \quad (\text{pag. } 156, \text{ lin. } 5)$$

si ha

$$\text{cil. M} = \frac{AV \,.\, \text{cono } EAF}{AC} =$$

$$= \frac{(6a - 3k) \,.\, \text{cono } EAF}{8a}\,,$$

dove si è posto

$$2a = CA,\ k = CG,\ 2a - \text{k} = AG.$$

Perciò sarà:

$$\text{cil. } N = \text{cono } EAF - \frac{(6a - 3k) \,.\, \text{cono } EAF,}{8a} =$$

$$= \frac{2a + 3k}{8a}\,, \text{cono } EAF.$$

Onde

$$AX \,.\, \text{segm. } BAD = 2a. \frac{2a + 3k}{8a} \,.\, \text{cono } EAF =$$

$$= \frac{2a + 3k}{4} \,.\, \text{cono } EAF.$$

Ricordando che

$$\text{segm. } BAD = \frac{a + k}{2a - k} \text{ cono } EAF\,, \quad \text{(pag. 155, lin. 14)}$$

si ha

$$AX = \frac{(2a + 3k)\ (2a - k)}{4a + 4k}$$

Da questa si deduce agevolmente la relazione data da ARCHIMEDE. Infatti, si ha subito

$$2a - k : AX = 4a + 4k : 2a + 3k\ ,$$

e dividendo

$$XG : AX = 2a + k : 2a + 3k\,.$$

Si può anche avere la distanza del centro di gravità dal vertice in funzione dell'altezza del segmento, ponendo:

$$h = 2a - k\,, \qquad \text{da cui} \qquad k = 2a - h\,.$$

È allora:

$$AX = \frac{(8a - 3h)h}{12a - 4h}\,.$$

Se si vuole invece la distanza d, dal centro della sfera, siccome $AX = a + d$, sarà

$$d = \pm \frac{3\,(2a - h)^2}{4\,(3a - h)}\,.$$

X.

(Centro di gravità di un segmento d'ellissoide di rotazione).

Con un procedimento simile al precedente si può anche vedere che:

Il centro di gravità di un segmento di sferoide si troverà sulla retta che è l'asse del segmento, in un punto che divide la retta stessa in modo che la parte di essa verso il vertice e la parte rimanente abbiano un rapporto uguale a quello che ha la somma dell'asse del segmento e del quadruplo dell'asse del segmento supplementare con la somma dell'asse del segmento e del doppio dell'asse del segmento supplementare (1).

---

(1) Nella 1ª ediz. invece di « sferoide » si leggeva « sfera »; e così fu supposto che questa prop. X (che in quella ediz. era la IX) fosse semplicemente una generalizzazione della precedente; nel senso che in quella si determinasse il centro di gravità di un segmento sferico maggiore di un emisfero, in questa invece si estendesse lo stesso risultato a un segmento sferico qualunque. Ma la limitazione supposta nella IX non esisteva in realtà che nella figura, dove per necessità bisognava riferirsi a un particolare segmento, e nella figura stessa si considerava il segmento *ABD* maggiore di un emisfero; mentre il procedimento (come osservò anche lo Zeuthen, nel *Commento* cit., pag. 349) è effettivamente generale e indipendente da ogni limitazione. La nuova lezione appare più convincente e più logica, come dalla determinazione del volume di un segmento sferico, fatta nella VII, si passa nella VIII a determinare il volume di un segmento di ellissoide; così nella IX e nella X si determina il centro di gravità rispettivamente di un segmento sferico e di un segmento di ellissoide.

Sia AC l'asse dell'ellissoide, AG l'asse di un suo segmento, GC l'asse del segmento supplementare. Il centro di gravità X del segmento divide il suo asse AG in due parti tali che

$$AX : XG = AG + 4 . GC : AG + 2 . GC .$$

Posto $CG = k$ e $AG = 2a - k$, risulta:

$$AX : XG = 2a + 3k : 2a + k ,$$

come per il segmento sferico.

XI.

(Volume e centro di gravità di un segmento d'iperboloide).

Con questo metodo si può anche vedere che:

Il rapporto fra un segmento di conoide ottusangolo (iperboloide di rotazione) e il cono avente la stessa base del segmento e lo stesso asse è uguale al rapporto fra la somma dell'asse del segmento con il triplo della retta aggiunta all'asse e la somma dell'asse del segmento stesso con il doppio della stessa retta aggiunta [1].

Il centro di gravità di un segmento di conoide ottusangolo si trova sul suo asse in un punto che divide l'asse stesso in modo che la parte di esso verso il vertice e la parte rimanente abbiano un rapporto uguale a quello che hanno la somma del triplo dell'asse con l'ottuplo della retta aggiunta e la somma dell'asse stesso del conoide con il quadruplo della stessa retta aggiunta.

---

[1] Cfr. *Sui conoidi* ecc., 25.

La *retta aggiunta all'asse* (ἡ προσούση τῷ ἄξονι, ἡ προσκειμένη πρὸς τὸν ἄξονα) s'intende il segmento compreso fra il vertice dell'iperboloide e il vertice del cono circoscritto all'iperboloide dal centro (cono asintotico).

Sia $2a$ l'asse trasverso dell'iperbole sezione dell'iperboloide con il piano passante per l'asse; a sarà la retta aggiunta.

Indicando con h $(= AG)$ l'asse del segmento, si ha:

segmento d'iperboloide: cono $= 3a + h : 2a + h$;

e, indicando con AX la distanza dal vertice A del suo centro di gravità:

$$AX : XG = 8a + 3h : 4a + h\,.$$

In queste formule, cambiando il segno + in —, si ritrovano le analoghe formule per un segmento d'ellissoide.

Molte altre cose di questo genere si possono esaminare con questo metodo; ma io le tralascierò, giacchè il metodo stesso è abbastanza dichiarato dagli esempi finora esposti.

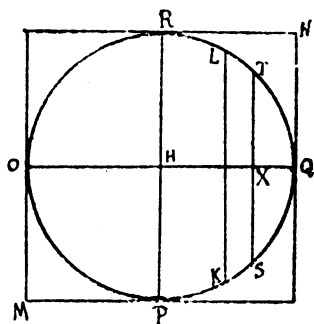
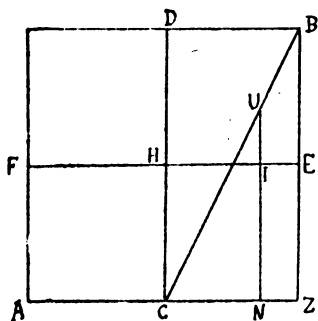
XII.

(Volume dell'unghia cilindrica - Determinazione meccanica).

Con questo metodo si può vedere che:

Se in un prisma retto a basi quadrate si inscrive un cilindro avente le sue basi su due quadrati opposti e la superficie (laterale) tangente agli altri quattro parallelogrammi del prisma, e se per il centro del circolo base del cilindro e per un lato del quadrato opposto si conduce un piano, la figura determinata da questo piano è la sesta parte di tutto il prisma.

Dopo aver ciò dichiarato, passerò a darne una dimostrazione servendomi di considerazioni geometriche.

Si consideri un prisma retto a basi quadrate, e nel prisma un cilindro inscritto nel modo detto. Si seghi il prisma con un piano per l'asse perpendicolare al piano che ha determinato il segmento cilindrico, e sia l'intersezione di questo piano con il prisma circoscritto al cilindro il parallelogrammo *AB*, e la retta *BC* l'intersezione commune del piano che ha determinato il segmento cilindrico e del piano condotto per l'asse ad esso perpendicolare. La retta *CD* sia l'asse del prisma e del cilindro; *EF* la divida per metà e sia ad essa perpendicolare.

Per *EF* si conduca un piano perpendicolare a *CD*; questo piano intersecherà il prisma secondo un quadrato, e il cilindro secondo un circolo; l'intersezione con il prisma sia il quadrato *MN*, con il cilindro il circolo *OPQR*, il quale tocchi i lati del quadrato nei punti *O*, *P*, *Q*, *R* ([1]). Sia la retta *KL* l'intersezione commune del

([1]) I punti *E*, *F* della prima figura corrispondono rispettivamente ai punti *O*, *Q* della seconda. Le due figure rappresentano due sezioni dello stesso solido, fatte con due piani tra loro ortogo-

piano che ha determinato il segmento cilindrico e del piano condotto per EF perpendicolarmente all'asse del cilindro; questa retta sarà tagliata per metà dalla retta QHO.

Nel semicerchio PQR si conduca una retta ST perpendicolare a QX; e da ST s'innalzi un piano perpendicolare a OQ, e lo si prolunghi da una parte e dell'altra del piano, che contiene il circolo $OPQR$. Questo piano intersecherà il semicilindro, che ha per base il semicerchio PQR e per altezza l'asse del prisma, secondo un parallelogrammo, di cui un lato è uguale a ST e l'altro è uguale al lato del cilindro; esso intersecherà anche il segmento cilindrico secondo un parallelogrammo, di cui un lato è uguale a ST e l'altro è uguale a NU, essendo NU una retta, condotta nel parallelo grammo DE, parallela a BZ e distante da questa di EI, uguale a QX.

Ora, poichè EC è un parallelogrammo, e NI, HC sono parallele attraversate dalle rette EH, CB, si ha

$$\begin{aligned} EH : HI &= ZC : CN \\ &= BZ : UN . \end{aligned}$$

Ma BZ sta a UN come il parallelogrammo determinato nel semicilindro sta al parallelogrammo determinato nel segmento cilindrico; giacchè ambedue i parallelogrammi hanno lo stesso lato ST; ed inoltre

$$EH = HQ \, , \, IH = XH \, , \, QH = HO \, ;$$

nali: uno passante per l'asse del cilindro e perpendicolare alle basi, l'altro condotto per il punto di mezzo dell'asse e parallelo alle basi. Esse pertanto valgono come due proiezioni dello stesso solido.

quindi

$OH : HX =$ (parallelog. nel semicilindro) : (parallelogrammo nel segm. cilindrico).

Si consideri il parallelogrammo del segmento (cilindrico) trasportato e posto in O, in modo che il suo centro di gravità sia O; si supponga inoltre QO come il giogo di una bilancia, di cui H sia il punto di mezzo.

Allora il parallelogrammo del semicilindro, rimanendo al suo posto, fa equilibrio al parallelogrammo del segmento cilindrico, trasportato e posto nel punto O del giogo, in modo che il suo centro di gravità sia O.

E poichè il centro di gravità del parallelogrammo del semicilindro è X (*lemma* 6) e il centro di gravità del parallelogrammo del segmento cilindrico trasportato è O; e il rapporto di OH a HX è uguale al rapporto fra il parallelogrammo, il cui centro di gravità dicemmo essere X, e il parallelogrammo, il cui centro di gravità dicemmo essere O;

segue che il parallelogrammo che ha per centro di gravità X, farà equilibrio, rispetto al punto H, al parallelogrammo che ha per centro di gravità O.

Allo stesso modo si potrà anche dimostrare che, se nel semicerchio PQR si conduce un'altra retta perpendicolare a QH, e da essa s'innalza un piano perpendicolare a QH, e questo piano si prolunga da una parte e dall'altra del piano che contiene il circolo $OPQR$, il parallelogrammo determinato nel semicilindro, rimanendo al suo posto, fa equilibrio, rispetto al punto H, al parallelogrammo determinato nel segmento cilindrico, trasportato e posto

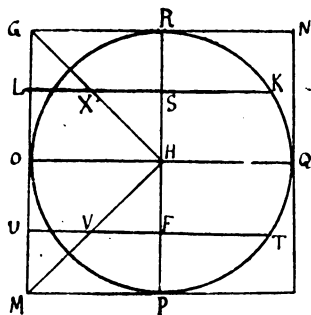
sul giogo nel punto O, in modo che il suo centro di gravità sia O.

Quindi anche tutti i parallelogrammi del semicilindro, rimanendo al loro posto, faranno equilibrio, rispetto al punto H, a tutti i parallelogrammi del segmento cilindrico, trasportati e posti sul giogo nel punto O;

per conseguenza, anche il semicilindro, rimanendo al suo posto, fa equilibrio, rispetto al punto H, al segmento cilindrico, trasportato e posto sul giogo in O, in modo che il suo centro di gravità sia O.

XIII.

Si consideri di nuovo il parallelogrammo MN, perpendicolare all'asse, e il circolo $OPQR$; si conducano le rette HM, HG, e da queste s'innalzino due piani perpendicolari al piano del semicerchio PQR, e si prolunghino questi due piani da una parte e dall'altra. In questo modo si formerà un prisma, che avrà la base uguale al triangolo HMG, e l'altezza uguale all'asse del cilindro.

Nel semicerchio PQR e nel quadrato MN si conducano due rette come KL, TU, equidistanti da QO; le quali taglino la periferia del semicerchio PQR nei punti K, T; il diametro PR nei punti S, F; le rette HG, HM nei punti V, X. Da KL, TU s'innalzino due piani perpendicolari a PR, e si prolunghino da una parte e dall'altra del piano che contiene

il circolo *OPQR*. Uno di questi piani intersecherà il semicilindro, che ha per base il semicerchio *PQR* e l'altezza uguale a quella del cilindro, secondo un parallelogrammo, di cui un lato è uguale a *KS* e l'altro uguale all'asse del cilindro; intersecherà parimenti il prisma *HGM* secondo un parallelogrammo, di cui un lato è uguale a *LX* e l'altro uguale all'asse. Per la stessa ragione, nello stesso semicilindro si avrà un altro parallelogrammo con un lato uguale a *TF* e con l'altro lato uguale all'asse del cilindro; e nel prisma *HGM* si avrà un altro parallelogramma con un lato uguale a *UV* e con l'altro lato uguale all'asse del cilindro [1].

[Essendo i centri di gravità dei rettangoli che hanno la base uguale a *SK*, *FT* rispettivamente i punti di mezzo delle rette *SK*, *FT*; il centro di gravità di tutti e due insieme sarà il punto *A'*, in cui la congiungente i centri di gravità di ciascun rettangolo incontra *HQ* (*lem.* 3). Per

---

[1] Nel ms. manca il resto della dimostrazione; ma quello che precede è abbastanza per supplire ciò che manca (ZEUTHEN, *Commento*, pag. 352). A tale scopo giova qui osservare che nella proposizione precedente è stato stabilito che il *segmento cilindrico* sospeso con il suo centro di gravità nel punto *F* (della prima figura) o nel punto *O* (della seconda) ad una leva appoggiata nel punto *H* sta in equilibrio con il *semicilindro* mantenuto al suo posto, la cui proiezione è il rettangolo *DBZC* (nella prima figura) o il semicerchio *PQR* (nella seconda). Per avere il volume del segmento cilindrico rimane da determinare il momento del semicilindro rispetto al piano rappresentato dalle traccie *CD* o *RP*. Questa determinazione viene effettuata appunto nella presente XIII prop. Il semicerchio *PQR* è la sezione retta del semicilindro; il triangolo *GHM* è la sezione retta del semicilindro; il triangolo *GHM* è la sezione retta di un prisma che ha la stessa altezza del prisma dato.

la stessa ragione, il centro di gravità di tutti e due insieme i rettangoli, che hanno la base uguale a XL, UV, sarà il punto B', in cui la congiungente i punti di mezzo delle rette XL, UV incontra la retta OH.

Ora si ha:

$$\begin{aligned}
\text{rett.}\,(SK) + \text{rett.}\,(TF) : \text{rett.}\,(KL) + \text{rett.}\,(UV) &= SK : LX \\
&= SK : SR \\
&= \text{quadr.}\,(SK) : \text{rett.}\,(SR, SK) \\
&= \text{rett.}\,(SR, SP) : \text{rett.}\,(SR, SK) \\
&= SP : SK \\
&= SR + 2SH : SK \\
&= LX + 2XS : SK \\
&= \frac{1}{2} LX + XS : \frac{1}{2} SK \\
&= B'H : A'H .
\end{aligned}$$

Quindi la somma dei rettangoli, che hanno la base uguale a SK, TF, e la somma dei rettangoli, che hanno la base uguale e LX, UV, si fanno equilibrio, rispetto al punto H.

Lo stesso vale anche per ogni altro rettangolo, che venga determinato, nello stesso modo, nel semicilindro e nel prisma triangolare.

Quindi anche il semicilindro e il prisma GHM, rimanendo al loro posto, si fanno equilibrio rispetto al punto H.

Ma il semicilindro fa equilibrio, rispetto al punto H, al segmento cilindrico trasportato in O, ed è $HO = QH$; ne risulta che il segmento cilindrico posto in Q farà equilibrio al prisma GHM, situato al suo posto.

Ora, il centro di gravità del prisma è sulla retta OH, in un punto tale che la sua distanza da H sia il doppio della sua distanza da O (*lem.* 9, 5); quindi

$$\text{(segm. cilindrico)} : \text{prisma } GHM = \frac{2}{3} OH : QH$$
$$= 2 : 3 .$$

E siccome il prisma GHM è la quarta parte di tutto il prisma AB, si conclude che

$$\text{segm. cilindrico} : \text{prisma } AB = 2 : 12$$
$$= 1 : 6 .$$

Dunque, il segmento cilindrico è la sesta parte di tutto il prisma circoscritto al cilindro].

In questa proposizione, come abbiamo già osservato, si contiene la determinazione del centro di gravità di un semicilindro (o di un semicerchio).

Infatti (linea . . .) il semicilindro PQR e il prisma GHM, rimanendo al loro posto, si fanno equilibrio rispetto al punto H; cioè, chiamando HY la distanza da H del centro di gravità del semicilindro, si ha

$$HY . \text{(semicil.)} = \frac{2}{3} . OH . \text{(prisma)},$$

$$HY . \pi a . HO^2 = \frac{2}{3} OH . 2a^3,$$

da cui

$$HY = \frac{4}{3\pi} . \frac{a^2}{OH} = \frac{4}{3\pi} a .$$

Ora, per la proposizione precedente, il semicilindro fa equilibrio al segmento cilindrico sospeso nel punto F, quindi

$$a\,.\,(\text{segm. cilindrico}) = \frac{4}{3\pi}\,a\,.\,(\text{semicilindro})\,,$$

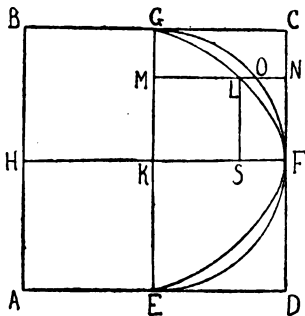
cioè

$$\text{segm. cilindrico} = \frac{4}{3}\,a^3$$

$$= \frac{1}{6}\,.\,8a^3\,.$$

XIV.

(Altra determinazione per il volume dell'unghia cilindrica).

Sia un prisma retto a basi quadrate, e una delle sue basi sia il quadrato $ABCD$. Nel prisma s'inscriva un cilindro, la cui base sia il circolo $EFGH$ tangente ai lati del quadrato $ABCD$ nei punti E, F, G, H. Per il centro di questo circolo e per il lato del quadrato opposto da $ABCD$, corrispondente a CD, si conduca un piano; questo piano staccherà dal prisma un altro prisma, che sarà la quarta parte del prisma intero, e che sarà compreso da tre parallelogrammi e da due triangoli fra loro opposti.

Nel semicerchio EFG s'inscriva una parabola, che passi per i punti G, E e abbia come asse FK. Nel paralle-

logrammo DG si conduca una retta MN parallela a KF; questa incontrerà la periferia del semicerchio in O, la parabola in L.

Ora, com'è chiaro,

$$\text{rett.}\ (MN, NL) = \text{quadr.}\ (NF)\ ,$$

e perciò

$$MN : NL = \text{quadr.}\ (KG) : \text{quadr.}\ (LS)\ \text{(1)}.$$

Da MN s'innalzi un piano perpendicolare ad EG; questo piano segherà il prisma già staccato dal prisma intero secondo un triangolo rettangolo, di cui uno dei lati comprendenti l'angolo retto sarà MN, l'altro la retta situata nel piano passante per CD (perpendicolare al piano $ABCD$) perpendicolare a CD in N e uguale all'asse del cilindro, e l'ipotenusa situata nello stesso piano secante. Lo stesso piano segherà il segmento cilindrico determinato dal piano condotto per EG e per il lato del quadrato opposto a CD secondo un triangolo rettangolo, di cui uno dei lati comprendenti l'angolo retto sarà MO, l'altro la retta della superficie cilindrica perpendicolare in O al piano KN, e l'ipotenusa situata nello stesso piano secante.

(1) La relazione $MN.\ NL = NF^2$ corrisponde all'equazione della parabola riferita all'asse e alla tangente nel vertice. È dimostrata da APOLLONIO, *Conic.*, I, 11. La seconda relazione è ricordata anche in *Quadratura della parabola*, 3, ove è detto che è dimostrata nei trattati anteriori sulle sezioni coniche. Cfr. APOLLONIO, I, 20.

Per conseguenza, poichè, com'è chiaro,

$$\text{rett.}\ (MN, ML) = \text{quadr.}\ (MO)\ [1]\ ,$$

si avrà, come nel caso precedente:

$$MN : ML = \text{quadr.}\ (MN) : \text{quadr.}\ (MO)$$

Ma il triangolo del prisma costruito su MN sta al triangolo del segmento cilindrico costruito su MO come il quadrato di MN sta al quadrato di MO; perciò:
triang. del prisma: triang. del segm. cilindrico $= MN : ML$.

Allo stesso modo si potrà anche dimostrare che, se si conduce nel parallelogrammo circoscritto alla parabola un'altra retta parallela a KF, e da questa retta s'innalza un piano perpendicolare a EG, si avrà che:

il triangolo determinato nel prisma sta al triangolo determinato nel segmento cilindrico, come la parallela a KF situata nel parallelogrammo DG sta alla parte di essa compresa tra la parabola EGF e il diametro EG.

Così, dunque, riempiuto il parallelogrammo DG con rette parallele a KF e il segmento compreso tra la parabola e il diametro con le parti di quelle parallele intercettate dal segmento stesso, si avrà che:

tutti i triangoli del prisma stanno a tutti i triangoli del segmento cilindrico come tutte le rette del parallelogrammo stanno a tutte le rette comprese tra la parabola e il diametro EG.

---

[1] Infatti: $MO^2 = MG.\ ME$
$= GK^2 - MK^2$ (Euclide, II. 5).
$= MN^2 - MN.\ NL$ (proprietà della parab.).
$= MN\ (MN - NL) = MN.\ ML.$

Ma il prisma è composto di tutti i triangoli che sono nel prisma, il segmento cilindrico è composto di tutti i triangoli che sono nel segmento stesso, il parallelogrammo DG è composto da tutte le rette parallele a KF che sono nel parallelogrammo stesso, e il segmento parabolico è composto di tutte le rette (parallele a KF) comprese tra la parabola e EG; e quindi:

$$\text{prisma} : \text{segmento cilindrico} = \text{parallelogrammo } DG : \text{segmento parabolico } EFG.$$

Ora, come fu dimostrato negli scritti precedenti [1]

$$\text{parallelogr. } DG = 1\frac{1}{2}\,(\text{segm. parabolico } EFG);$$

quindi anche:

$$\text{prisma} = 1\frac{1}{2}\,(\text{segm. cilindrico}).$$

Per conseguenza,

$$\frac{1}{2}\,(\text{segmento cilindrico}) = \frac{1}{3}\,(\text{prisma}).$$

D'altra parte,

$$\frac{1}{3}\,(\text{prisma}) = \frac{1}{12}\,(\text{prisma totale circoscritto al cilindro}),$$

essendo questo il quadruplo dell'altro; e perciò:

$$\frac{1}{2}\,(\text{segmento cilindrico}) = \frac{1}{12}\,(\text{prisma totale}).$$

---

[1] Cioè in *Quadratura della parabola*, 24. Cfr. *Metodo*, prop. I.

Dunque

$$\text{segmento cilindrico} = \frac{1}{6}\,(\text{prisma totale}).$$

In questa proposizione e nella seguente è notevole l'uso della parabola, come curva ausiliaria, che permette di ottenere la cubatura dell'unghia cilindrica per mezzo dell'area già nota del segmento parabolico.

Il procedimento esposto in questa proposizione, come quello di tutte le proposizioni precedenti, non ha per ARCHIMEDE il valore di una vera dimostrazione, perchè fondato su concetti infinitesimali. Essa costituisce piuttosto una preparazione alla dimostrazione geometrica, che è svolta nel paragrafo seguente, dando alle considerazioni infinitesimali quivi impiegate la forma di una dimostrazione per esaustione.

XV.

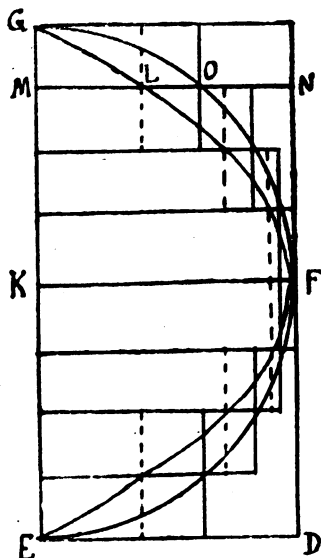
(Dimostrazione geometrica della prop. XII).

Sia un prisma retto a basi quadrate, di cui una sia il quadrato $ABCD$. Nel prisma si inscrive un cilindro, la cui base sia il circolo EFG, tangente ai lati del quadrato nei punti E, F, G, H, e avente per centro il punto K.

Per il diametro EG e per il lato del quadrato opposto corrispondente a CD si conduca un piano. Questo piano stacca dal prisma totale un prisma e dal cilindro un segmento cilindrico.

Ora io dico che si può dimostrare, che questo segmento staccato dal cilindro dal piano così condotto è la sesta parte del prisma totale.

Dimostrerò innanzi tutto che si può inscrivere nel segmento cilindrico un solido e circoscrivergliene un altro, composti ambedue di prismi aventi la stessa altezza e basi triangolari simili, tali che il solido circoscritto superi quello inscritto di una grandezza minore di una grandezza qualunque preassegnata.

[Si divida il diametro *EG* del semicerchio *EFG* successivamente in due parti uguali, e per i punti di divisione si conducano le parallele a *KF*, e per i punti in cui queste incontrano la semicirconferenza si conducono le parallele a *EG*, e queste si prolunghino da una parte e dall'altra fino ad incontrarsi con le due rette più vicine parallele a *KF*. Per queste due parallele si conducano due piani perpendicolari al piano del semicerchio. Questi piani determineranno dei prismi inscritti e circoscritti al segmento cilindrico, aventi la stessa altezza e per base dei triangoli rettangoli con un cateto sulle parallele a *KF*.

Si continui la divisione della retta *EG* in parti uguali finchè i due prismi circoscritti, che hanno lo spigolo comune in *KF*, siano minori di una grandezza qualunque assegnata; allora, la differenza fra il solido prismatico circoscritto al segmento cilindrico e il

solido inscritto sarà anch'essa minore d'una grandezza qualunque. Tale differenza, infatti, è uguale alla somma dei due prismi circoscritti che hanno lo spigolo comune in *KF;* poichè ad ogni altro prisma del solido circoscritto corrisponde un prisma equivalente del solido inscritto.

Si tracci, ora, nel semicerchio la parabola *EFG*, e per i punti in cui essa è segata dalle rette parallele a *FK* si conducan le parallele a *EG*; si avranno due figure composte di parallelogrammi (rettangoli), una circoscritta alla parabola e l'altra inscritta, la cui differenza è uguale alla somma dei due parallelogrammi che hanno la base comune in *FK*. Ciascuno di tali parallelogrammi corrisponde a uno dei prismi dei solidi prismatici sopradetti.

Ora, se il segmento cilindrico non è uguale alla sesta parte del prisma totale, sarà maggiore o minore.

Supponiamo, in primo luogo, che possa esser maggiore; in tal caso il prisma parziale determinato dal piano secante obliquo sarà minore dei $\frac{3}{2}$ del segmento cilindrico.

S'inscriva nel segmento cilindrico una figura solida e se ne circoscriva un'altra, nel modo sopra detto, tali che il solido circoscritto superi quello inscritto d'una grandezza minore di una grandezza qualunque assegnata.

Sia *MN* una delle rette parallele a *KF* condotte nel parallelogrammo *DG*; sia *ML* la parte di essa compresa tra la parabola *EFG* e il diametro *EG*, e *MO* la parte compresa tra *EG* e la semicirconferenza.

Abbiamo dimostrato (prop. XIV) che un piano perpendicolare al parallelogrammo *DG* condotto per *MN* sega

il prisma parziale e il segmento cilindrico secondo due triangoli tali che

triangolo del prisma parziale: triangolo del segmento cilindrico $= MN : ML$.

Perciò anche:

il prisma del prisma parziale che ha per spigolo MN sta al prisma del solido inscritto al segmento cilindrico che ha per spigolo MO come MN sta a ML.

Ma d'altra parte:

il parallelogrammo del parallelogrammo DG che ha per lato MN sta al parallelogrammo inscritto nella parabola che ha per lato ML come MN sta ad ML.

Risulta che:

la somma dei prismi componenti il prisma parziale sta alla somma dei prismi componenti il solido inscritto al segmento cilindrico come la somma dei parallelogrammi componenti il parallelogrammo DG sta alla somma dei parallelogrammi componenti la figura inscritta al segmento parabolico (*lem.* II); quindi:

il prisma parziale sta al solido inscritto nel segmento cilindrico come il parallelogrammo DG sta alla figura inscritta nel segmento parabolico.

Ora, poichè il prisma parziale è minore dei $\frac{3}{2}$ del segmento cilindrico, e questo supera il solido in esso inscritto di una grandezza più piccola di una grandezza qualunque assegnata, sarà anche]

il prisma (parziale) determinato dal piano obliquo minore dei $\frac{3}{2}$ del solido inscritto al segmento cilindrico.

Ma è stato dimostrato che

il prisma (parziale) determinato dal piano obliquo sta al solido inscritto nel segmento cilindrico come il parallelogrammo *DG* sta alla somma dei parallelogrammi inscritti nel segmento compreso tra la parabola e la retta *EG*;

quindi il parallelogrammo *DG* è minore dei $\frac{3}{2}$ della somma dei parallelogrammi inscritti nel segmento compreso tra la parabola e la retta *EG*.

Ma questo è impossibile; perchè altrove abbiamo dimostrato che il parallelogrammo *DG* è uguale ai $\frac{3}{2}$ del segmento compreso tra la parabola e la retta *EG*.

Dunque, il segmento cilindrico non è maggiore della sesta parte del prisma totale.

[Supponiamo, in secondo luogo, che possa esser minore; in tal caso il prisma parziale determinato dal piano obliquo sarà maggiore dei $\frac{3}{2}$ del segmento cilindrico.

È possibile inscrivere e circoscrivere al segmento cilindrico dei solidi prismatici tali, che il prisma parziale risulti maggiore anche dei $\frac{3}{2}$ del solido circoscritto al segmento cilindrico.

Considerando ora il solido circoscritto al segmento cilindrico e la figura circoscritta al segmento parabolico, e ragionando come precedentemente, si dimostrerà che:]

la somma dei prismi componenti il prisma determinato dal piano obliquo sta alla somma dei prismi compo-

nenti il solido circoscritto al segmento cilindrico, come la somma dei parallelogrammi componenti il parallelogrammo DG sta alla somma dei parallelogrammi componenti la figura circoscritta al segmento (parabolico) compreso tra la parabola e la retta EG;

cioè, il prisma determinato dal piano obliquo sta al solido circoscritto al segmento cilindrico come il parallelogrammo DG sta alla figura circoscritta al segmento (parabolico) compreso tra la parabola e la retta EG.

Ma il prisma determinato dal piano obliquo è maggiore dei $\frac{3}{2}$ del solido circoscritto al segmento cilindrico;

[perciò anche il parallelogrammo DG è maggiore dei $\frac{3}{2}$ della figura circoscritta al segmento parabolico compresa tra la parabola e la retta EG.

Ma questo è impossibile; perchè altrove abbiamo dimostrato che il parallelogrammo DG è uguale ai $\frac{3}{2}$ dello stesso segmento parabolico.

Dunque, il segmento cilindrico non è minore della sesta parte del prisma totale.

Poichè dunque non è possibile che il segmento cilindrico sia maggiore o minore della sesta parte del prisma totale, è necessario che sia uguale alla sesta parte di esso prisma, c. d. d. (1)].

---

(1) Questa prop. contiene pur troppo molte lacune. Dai frammenti conservati si capisce però che la dimostrazione di ARCHIMEDE consisteva in una dimostrazione per esaustione. Ora, il metodo di tali dimostrazioni è così regolare, ed è così chiaramente

XVI.

(Volume del solido comune a due cilindri inscritti in un cubo - Deduzione meccanica) [1].

[Se in un cubo s'inscrive un cilindro avente le basi sopra due quadrati opposti e la superficie laterale tangente alle altro quattro faccie; e se nello stesso cubo s'inscrive poi un altro cilindro avente le basi su altri due quadrati e la superficie laterale tangente alle rimanenti faccie, il solido racchiuso delle superficie dei due cilindri e comune ad essi due è uguale ai due terzi di tutto il cubo.

Sia un cubo, e in esso due cilindri inscritti nel modo anzidetto. Per il centro K del cubo si conduca un piano

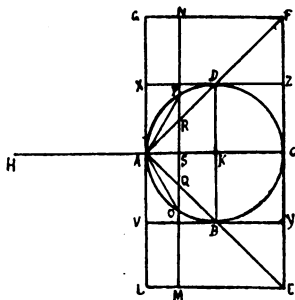
---

illustrato da altri esempi dello stesso ARCHIMEDE (per esempio, da dimostrazioni che si leggono nello scritto *Sui conoidi e gli sferoidi*) che la sua ricostruzione è abbastanza facile. ZEUTHEN ne ha indicato le traccie e HEIBERG l'ha magistralmente sviluppata. È quella che abbiamo riprodotta nel testo, con leggiere modificazioni. Con essa concorda sostanzialmente la dimostrazione adottata da HEATH, ne differisce invece alquanto quella di REINACH.

(1) Nel ms. mancano i fogli che avrebbero dovuto contenere l'esposizione della seconda proposizione annunciata nell'introduzione, e cioè la sua deduzione meccanica e la dimostrazione geometrica. La restituzione dei fogli mancanti non è però difficile. Della prima indicò le traccie ZEUTHEN (*Commento*, pag. 356 seg.); la svilupparono REINACH (l. c., pag. 84 seg.) e HEATH (*Archimedes*, pag. 447 seg.), i quali vi aggiunsero anche uno schema della seconda. La deduzione meccanica che qui aggiungo è stata fatta imitando i ragionamenti della prop. II; la dimostrazione geometrica esposta nella seguente proposizione è stata condotta sull'esempio della prop. XV.

perpendicolare a due faccie opposte. Questo piano segherà il cubo secondo il quadrato $VXYZ$, il cilindro il cui asse è perpendicolare al piano stesso secondo il circolo $ABCD$, e l'altro cilindro secondo lo stesso quadrato $VXYZ$.

AC, BD siano due diametri del circolo, tra loro perpendicolari. Per BD si conduca un piano perpendicolare al quadrato $VXYZ$; questo piano intersecherà il cubo secondo un quadrato perpendicolare allo stesso quadrato $VXYZ$, e il cui centro è lo stesso punto K.

S'immagini la piramide che ha il vertice in A e per base questo quadrato perpendicolare. Si prolunghi la superficie laterale di questa piramide e si seghi con un piano per C parallelo alla sua base; la sezione sarà un quadrato perpendicolare ad AC, di lato EF, doppio di BD.

Su quest'ultimo quadrato si costruisca un parallelepipedo che abbia l'asse uguale ad AC; il rettangolo $EFLG$ sia la sua sezione con il piano passante per K e perpendicolare alla sua base.

Si prolunghi poi CA e si faccia $AH = AC$, e si consideri CH come il giogo di una bilancia di cui A sia il punto di mezzo.

Si conduca nel parallelogrammo EF una retta MN parallela a BD, la quale seghi il circolo $ABCD$ nei punti O, P, il diametro AC in S, la retta AE in Q, la retta AF in R.

S'innalzi sulla stessa retta MN un piano perpendicolare ad AC. Questo piano segherà il parallelepipedo $(EFLG)$ secondo un quadrato il cui lato è uguale a MN, la piramide (AEF) secondo un quadrato il cui lato è uguale a QR, il solido comune ai due cilindri secondo un quadrato il cui lato è uguale a OP.

Ora (v. prop. II, pag 119, lin. 7):

$$\text{rett.}\ (MS, SQ) = \text{quadr.}\ (OS) + \text{quadr.}\ (SQ)\ ;$$

e poichè

$$HA : AS = MS : SQ\ ,$$

si avrà che

$$HA : AS = \text{quadr.}\ (MN) : \text{quadr.}\ (OP) + \text{quadr.}\ (QR).$$

Perciò il quadrato di lato MN, che è nel parallelepipedo, rimanendo al suo posto, farà equilibrio, rispetto al punto A, a tutti e due i quadrati della piramide e del solido, che hanno i lati uguali a OP e a QR, trasportati e posti con il loro centro di gravità in H.

E così analogamente per tutti gli altri quadrati che si ottengono con altri piani perpendicolari ad AC.

Quindi il parallelepipedo rimanendo al suo posto farà equilibrio, rispetto ad A, al solido comune ai due cilindri e alla piramide (AEF), trasportati con il loro centro di gravità in H.

Ora, il centro di gravità del parallelepipedo è K (*lem.* 9). Quindi

$$HA : AK = (\text{parallelepipedo}) : (\text{solido} + \text{piramide}),$$

cioè

$$2 : 1 = (\text{parallelepipedo}) : (\text{solido} + \frac{1}{3}\,\text{parallelepipedo}).$$

Per conseguenza

$$2\,(\text{solido}) + \frac{2}{3}\,(\text{parallelepipedo}) = (\text{parallelepipedo})$$

ossia

$$\text{solido} = \frac{1}{6}\,(\text{parallelepipedo})$$

$$= \frac{2}{3}\,(\text{cubo})].$$

XVII.

(Dimostrazione geometrica della prop. XVI).

[Sia un cubo, e in esso due cilindri inscritti nel modo detto. Sia il quadrato *VXYZ* la sezione del cubo e di un cilindro fatta con un piano per il punto *K* perpendicolare a due faccie del cubo, e il cerchio *ABCD* la sezione dell'altro cilindro.

Si divida *AC* in parti uguali e dai punti di divisione si conducano dei piani perpendicolari ad *AC*. Questi piani segano il cubo e il solido secondo dei quadrati, il cui lato è rispettivamente uguale a *BD* o a una corda *OP* parallela a *BD*.

Si inscriva e si circoscriva al solido comune ai due cilindri uno scaloide prismatico. La differenza fra i due scaloidi è uguale alla somma dei due prismi circoscritti che hanno la base comune sul piano passante per BD. Dimodochè se il numero delle parti in cui è diviso AC è abbastanza grande, la differenza fra i due scaloidi può diventare minore di qualsiasi grandezza assegnata.

Ciò posto, si tracci nel semicerchio ABC la parabola ABC; per i punti in cui essa è segata dalle parallele a BD, condotte per i punti di divisione di AC, si conducano le parallele ad AC, e si consideri la figura poligonale inscritta a quella circoscritta al segmento parabolico ABC.

Ora, se il solido comune ai due cilindri non è uguale ai $\frac{2}{3}$ del cubo, esso sarà maggiore o minore.

Supponiamo in primo luogo che possa essere maggiore.

In tal caso la metà di esso, cioè la parte compresa nel prisma $VYAC$ sarà maggiore di $\frac{1}{3}$ del cubo stesso e la metà del cubo sarà minore dei $\frac{3}{2}$ della metà del solido.

Alla metà del solido si possono inscrivere e circoscrivere, come fu detto, due scaloidi tali che la loro differenza sia più piccola di qualunque grandezza assegnata.

Sia NM una parallela a BD condotta nel rettangolo VC, e ML la parte di essa compresa fra la parabola e il diametro AC e MO la parte compresa fra lo stesso diametro e la circonferenza.

Un piano per NM perpendicolare ad AC sega il prisma e la metà del solido secondo due rettangoli simili aventi per lati $NM = BK$, OM. Perciò considerando due prismi elementari appartenenti al prisma (VC) e allo scaloide inscritto che hanno per basi i due detti rettangoli, si ha:

$$\text{prisma di } (VC) : \text{prisma inscr.} = \text{quad. } (NM) : \text{quad. } (OM)$$
$$= MN : ML \quad \text{(cfr. prop. XIV), pag. 171, lin. 4).}$$

Analogamente si ha che il rettangolo elementare del rettangolo VC costruito su NM sta al rettangolo della figura inscritta al segmento parabolico costruito su LM come MN sta a ML.

Quindi:

il prisma (VC) sta allo scaloide inscritto nella metà del solido come il rettangolo VC sta alla figura inscritta al segmento parabolico.

Ma siccome il prisma fu supposto minore dei $\frac{3}{2}$ della metà del solido e questa supera lo scaloide in essa inscritto di una grandezza più piccola di qualunque grandezza assegnata, sarà anche

$$\text{prisma } (VC) < \frac{3}{2} \text{(scaloide inscritto metà solido),}$$

e perciò dovrebbe essere anche

$$\text{rett. } VC < \frac{3}{2} \text{(fig. inscritta segm. parab.).}$$

Ma questo è impossibile, poichè

$$\text{rett. } VC = \frac{3}{2} \text{(segm. parabol.)}.$$

Dunque il solido comune ai due cilindri non è maggiore dei $\frac{2}{3}$ del cubo.

Supponiamo in secondo luogo che il solido comune ai due cilindri possa esser minore dei $\frac{2}{3}$ del cubo.

In questo caso la metà del cubo sarà maggiore dei $\frac{3}{2}$ della metà del solido.

Allora alla metà del solido si possono inscrivere e circoscrivere due scaloidi nel modo già detto e ottenere che la metà del cubo sia maggiore dei $\frac{3}{2}$ dello scaloide circoscritto.

Come nel caso precedente si può dimostrare che

$$\text{prisma } (VC) : \text{(scaloide circoscr.)} = \text{rett. } VC : \text{(fig. circoscr. segm. parab.)}.$$

Da ciò risulta che

$$\text{rett. } VC > \frac{3}{2} \text{(fig. circoscr. segm. parab.)}.$$

Ma questo è impossibile, perchè

$$\text{rett. } VC = \frac{3}{2} \text{(segm. parab.)}.$$

Dunque il solido comune ai due cilindri non può essere minore dei $\frac{2}{3}$ del cubo.

Ma abbiamo dimostrato che non può essere neppure maggiore; quindi è uguale ai due terzi del cubo].

Come abbiamo già osservato, i due teoremi contenuti nelle proposizioni XII-XVII del *Metodo* furono citati da ERONE nei *Metrica*. A proposito dell'ultimo teorema ERONE osserva, inoltre, che esso è particolarmente interessante per la pratica, poichè nelle costruzioni delle volte, delle fontane e dei bagni s'incontra spesso un solido formato da due cilindri che si intersecano ad angolo retto.

Ora vogliamo notare come questi stessi teoremi fossero conosciuti anche da matematici del sec. XVI, sebbene l'opera completa di ARCHIMEDE e di ERONE, a quanto sembra, fosse rimasta ignorata e pubblicata solo al principio del nostro secolo.

Il celebre pittore di Borgo Sansepolcro PIERO DELLA FRANCESCA, che morì nel 1492, nell'opera *De Corporibus regularibus* (composta negli ultimi anni di sua vita e pubblicata da G. MANCINI nelle *Memorie della R. Accademia dei Lincei*, 1916) tratta di alcuni problemi che hanno evidenti relazioni con quelli trattati da Archimede. LUCA PACIOLI, com'è noto, si servì di questa opera per compilare il trattato dei cinque corpi regolari stampato in appendice alla *Divina Proportione*, 1509, libro che ebbe molta celebrità e contribuì perciò a divulgare gli studi di PIERO DELLA FRANCESCA, rimasti inediti, sebbene di questi non faccia mai menzione.

Ecco nella traduzione del PACIOLI gli enunciati di due problemi:

« Egli è una colonna tonda a sesto che il diametro suo « è 4, cioè de ciascuna sua basa, ed un'altra colonna de simile « grossezza la fora hortogonalmente; domandase che quantità « se leva de la prima colonna per quella foratura, cioè che

« quantità se leva de la colonna per quello buso » (*Tract. tertius, casus 10*; nell'opera del DELLA FRANCESCA, *Tract. quartus, prop. X*).

« Egli è una volta a crùciera et per ciascuna faccia 8, et è « alta 4, così nel colmo degli archi commo nel mezzo della volta; domandase de la sua superficie concava » (*Tract. tertius, casus 11*; DELLA FRANCESCA, *tract. quartus, prop. XI*).

Le soluzioni dei problemi sono esatte; le dimostrazioni invece, con cui si cerca di giustificare i risultati, involute e inesatte.

Problemi simili, insieme con altri relativi all'unghia cilindrica, attrassero l'attenzione di molti matematici e furono studiati e nei primordi del calcolo infinitesimale da KEPLERO (1615), CAVALIERI (1639), TACQUET (1659), VIVIANI (1692), GRANDI (1699), ecc.

(Per queste notizie cfr. le memorie di G. VACCA, negli *Atti della R. Accademia dei Lincei*, 1914, e dell'Accademia di Napoli, 1920).

PARTE TERZA.

LE INTEGRAZIONI DI ARCHIMEDE.

1. - Il concetto di « integrale » in Archimede.

Parlando delle *integrazioni* di ARCHIMEDE intendiamo riferirci alle risoluzioni che egli ha dato di problemi che noi siamo soliti risolvere mediante il calcolo integrale. Adoperiamo questa parola perchè alla base dei procedimenti archimedei si ritrova sostanzialmente un concetto identico a quello che informa il nostro calcolo.

Infatti, egli considera le superficie e i volumi come somma (di un numero infinito) di elementi infinitamente piccoli. Non diversamente considerarono la superficie e i volumi KEPLERO, CAVALIERI e tutti coloro che prepararono direttamente la nascita del calcolo integrale.

Le rette o i circoli con cui ARCHIMEDE *riempie*, per esempio, il segmento parabolico o la sfera corrispondono agli *indivisibili* di CAVALIERI; l'espressione archimedea « il segmento parabolico è composto di tutte le corde parallele al suo diametro »,

« la sfera, l'ellissoide, ecc., sono riempiti da tutte le loro sezioni circolari parallele » è l'equivalente del principio cavalieriano « ogni figura è la somma di tutti i suoi indivisibili ». Perciò quelle espressioni si possono tradurre fedelmente con il simbolo leibnitziano, dando a questo simbolo soltanto il significato di sommatoria e di integrale definito (senza attribuirgli alcun accenno al problema inverso delle derivate e delle tangenti e senza connettervi affatto d'idea della funzione primitiva).

In questo senso ARCHIMEDE possedeva il concetto di integrale; e potremo rappresentare la sua maniera di definire le aree e i volumi con gli integrali (riferendoci a coordinate ortogonali)

$$\int_a^b k\, dx\,, \qquad \int_a^b A\, dx\,,$$

dove k rappresenta l'ordinata corrispondente ad un certo valore x dell'ascissa, A la superficie della sezione determinata nel solido da un piano condotto per un punto di ascissa x; a, b essendo gli estremi di integrazione.

Questo concetto, adombrato nei predecessori (DEMOCRITO, EUDOSSO), appare in ARCHIMEDE chia-

ro e distinto; e mentre prima era rimasto pressochè inefficace, diventa per lui uno strumento potente di ricerca.

A questa prima concezione (che può dirsi intuitiva) ARCHIMEDE stesso diede una forma più precisa, valida per le sue rigorose dimostrazioni geometriche.

Egli osserva che ad una figura curvilinea o ad un solido limitato da superficie curve si può sempre inscrivere e circoscrivere una figura poligonale o un solido prismatico tali che la differenza fra la figura inscritta e circoscritta sia minore di una grandezza qualunque piccola ad arbitrio.

Sia A l'area o il volume che si deve determinare; B e B' l'area o il volume della figura inscritta e circoscritta; si ha

$$B < A < B'.$$

E poichè

$$B' - B < \varepsilon$$

anche le differenze

$$B' - A, \quad A - B$$

possono diventare minori di qualunque grandezza assegnata.

Donde segue che le serie delle grandezze B' e B *convergono* contemporaneamente verso la grandezza A; ossia, A si può riguardare come il *limite* comune di quelle due serie.

ARCHIMEDE non dice questo esplicitamente; ma si capisce che è questa l'idea che presiede alle sue dimostrazioni. Le quali si compongono di una doppia riduzione all'assurdo; ma in sostanza dimostrano questo:

se X è una grandezza *maggiore* di qualsiasi figura inscritta in A e *minore* di qualsiasi figura circoscritta ad A, allora non può essere X diversa da A, ma è $X = A$.

2. – Il concetto di « Momento statico ».

Un'altra prova della maturità che nella mente di ARCHIMEDE avevano raggiunto le concezioni infinitesimali è la introduzione del nuovo concetto di *Momento* (*statico*) di una figura piana o di un solido rispetto ad un punto (e anche rispetto ad una retta o ad un piano), e cioè il prodotto della superficie o del volume per la distanza del suo centro di gravità dal punto.

È vero che egli non dà un nome a questo prodotto e neppure lo introduce esplicitamente nei suoi ragionamenti (nei quali si fa sempre uso di rapporti). Però si può osservare che in questi ragionamenti interviene costantemente una grandezza (superficie o volume) che sospesa sopra una leva a una distanza determinata dal fulcro fa equilibrio a un'altra grandezza sospesa in un altro punto della leva stessa. In tutti gli esempi considerati da ARCHIMEDE la condizione d'equilibrio, posta da lui sotto forma di una proporzione, dà luogo sempre all'uguaglianza di due prodotti, che equivalgono ai *momenti* delle due figure rispetto allo stesso punto (il fulcro della leva).

Inoltre egli presuppone che: « il momento di una figura è uguale alla somma dei momenti dei suoi elementi »; proposizione che noi esprimiamo dicendo che il momento di una figura rispetto ad un punto è dato da

$$\int_v \delta \, dv, \qquad \int_S \delta \, dS,$$

dove dv, dS rappresentano rispettivamente l'elemento del volume o dell'area della figura considerata e δ la sua distanza dal punto.

Questo concetto ricorre anche nella *Quadratura della Parabola*; ma è nel *Metodo* che ne fa una continua e felicissima applicazione, anticipando l'uso che del medesimo concetto si fece nelle ricerche infinitesimali del sec. XVII (da GULDINO, da PASCAL e in modo speciale da TORRICELLI).

3. - Il «**Metodo**».

Nell'applicazione sistematica dei concetti ora esposti, di *integrale* e di *momento*, consiste il metodo dichiarato nella lettera a ERATOSTENE. ARCHIMEDE lo espone con una chiarezza, un'eleganza e una modernità di espressioni che formano l'irresistibile attrattiva e la mirabile caratteristica di queste pagine, scritte da oltre due mila anni; leggendole sentiamo singolarmente vicino a noi il genio del sommo Siracusano. Esse costituiscono una vera anticipazione del Calcolo integrale; anticipazione prima in ordine di tempo, e nella sicurezza dei procedimenti, nella genialità degli artifici non sorpassata dai precursori del secolo XVII.

A questo metodo ARCHIMEDE attribuisce esclusivamente valore come mezzo di ricerca e di scoperta;

sotto questo aspetto lo dichiara utilissimo per lo sviluppo delle matematiche. Occorre pertanto mettere in luce anzitutto in che cosa consista questa speciale utilità. Al qual proposito osserveremo che gli esempi con cui il metodo è illustrato non contengono determinazioni dirette di quadrature o di cubature, ma solo la riduzione delle quadrature o delle cubature di certe figure a quelle note di altre figure. Ma le quadrature e le cubature note erano allora assai poche; gli studi dei predecessori di ARCHIMEDE non furono molto fecondi a questo riguardo. Ma egli seppe abilmente valorizzare i pochi risultati di cui disponeva, e in pochi anni potè compensare la sterilità dei secoli antecedenti. Fu merito del suo metodo; il quale giustamente godeva la sua fiducia e poteva essere raccomandato ai matematici « presenti e futuri ».

Dal punto di vista moderno diremo che esso non contiene procedimenti che equivalgano a integrazioni dirette, ma soltanto la trasformazione di certi integrali in integrali più semplici e già noti.

Credo che riuscirà interessante vedere come i ragionamenti di cui si fa uso nel *Metodo* si traducano immediatamente e senza artificiosità al-

cuna in formule di calcolo integrale. Basta a tale scopo riprendere in esame le proposizioni che lo compongono e sostituire i simboli sopra dichiarati alle equivalenti perifrasi verbali. Abbiamo già osservato che ad ARCHIMEDE mancava il nostro simbolo, non il concetto che lo informa.

4. – I procedimenti infinitesimali del « Metodo » per la determinazione delle aree e dei volumi.

a) *Area del segmento parabolico;* prop. I.

Per trovare l'area del segmento parabolico ABC ARCHIMEDE confronta il segmento stesso con il triangolo ACF.

Nel riassumere i suoi ragionamenti ci riferiremo ad assi coordinati con l'origine in C, assumendo come asse x la retta AC e come asse y il diametro per C.

Conduciamo nel triangolo ACF per un punto qualunque di ascissa x una retta parallela al diametro e siano y, y' i segmenti di essa compresi nella parabola e nel triangolo (nella figura, PO, OM). Per qualunque retta così condotta si ha (posto $AC = 2a$):

$$2a : (2a - x) = y' : y; \quad \text{(pag. 113, lin. 7)}$$

e siccome i centri di gravità delle y' sono tutti sulla retta CK, che passa per i loro punti di mezzo, da questa relazione si ricava che ogni segmento y del segmento parabolico sospeso per il suo punto di mezzo sulla CK alla distanza $2a$ da K fa equilibrio al corrispondente segmento y' del triangolo situato al suo posto.

Ora il segmento parabolico si può immaginar composto di tutti i segmenti y che si possono condurre nel modo detto per i punti di AC, e quindi come somma di tanti elementi $y\,dx$; e, similmente, il triangolo ACF composto di altrettanti elementi $y'dx$.

Onde avremo che il segmento parabolico sospeso con il suo centro di gravità in H ($KH = 2a$) fa equilibrio al triangolo sospeso con il suo centro di gravità in X (essendo $KX = \frac{1}{3} \cdot 2a$).

Quindi

$$2a\int_0^{2a} y\,dx = \frac{1}{3} \cdot 2a \cdot (\text{tr. } ACF);$$

ossia, essendo $y = \frac{1}{2p}(2a\,x - x^2)$,

$$\frac{1}{2p}\int_0^{2a}(2ax - x^2)\,dx = \frac{1}{3} \cdot (\text{tr. } ACF).$$

Se inoltre osserviamo che $y' = \frac{a}{p} x$, si ha

$$(\text{tr. } ACF) = \frac{a}{p} \int_0^{2a} x \, dx$$

e quindi

$$\int_0^{2a} (2ax - x^2) \, dx = \frac{2}{3} a \int_0^{2a} x \, dx$$

b) *Volume della sfera e dell'ellissoide e dei loro segmenti.*

Esaminiamo particolarmente il caso della sfera, prop. II. Sia $2a$ il diametro della sfera, e poniamo

$$2a = AC = \text{AH}; \; EF = 4a.$$

Si ponga in A l'origine degli assi e sia AC l'asse x, LG l'asse y, $AS = x$.

Il piano condotto per un punto d'ascissa x perpendicolarmente al diametro sega il cilindro (GE), il cono (AEF) e la sfera secondo circoli la cui area è rispettivamente

$$4 \pi a^2 \; ; \quad \pi x^2 \; ; \quad \pi y^2 = \pi x (2a - x).$$

I volumi rispettivi del cilindro, del cono e della sfera saranno pertanto

$$4 \pi a^2 \int_0^{2a} dx \; ; \quad \pi \int_0^{2a} x^2 \, dx \; ; \quad \pi \int_0^{2a} (2a x - x^2) \, dx.$$

Per ognuno dei circoli considerati si ha

$$2a : x = 4\pi a^2 : [\pi x^2 + \pi (2a x - x^2)],$$ (pag. 120, lin. 5),

e quindi il momento del cilindro situato al suo posto, rispetto ad A, è uguale al momento del cono e della sfera sospesi sul prolungamento di CA alla distanza $2a$ da A.

Siccome il centro di gravità del cilindro è in K, $AK = a$, si ha

$$a \text{ (cilindro)} = 2a \text{ (cono + sfera)}.$$

D'altra parte è

$$\text{cilindro} = 3 \text{ (cono)}.$$

Dunque

$$\text{sfera} = \frac{1}{2} \text{ (cono)},$$

cioè

$$\pi \int_0^{2a} (2ax - x^2)\, dx = \frac{1}{2} \pi \int_0^{2a} x^2\, dx,$$

che equivale alla prima relazione stabilita da ARCHIMEDE.

L'altra relazione che deduce in seguito:

$$\text{sfera} = \frac{2}{3} \text{ (cilindro } VZ),$$

dà luogo invece alla formula

$$\pi \int_0^{2a} (2ax - x^2) dx = \frac{2}{3} \pi \; a^2 \int_0^{2a} dx$$

Con ragionamenti alquanto più complicati, lo stesso procedimento è applicato nella prop. VII a determinare il volume di un segmento sferico a una base di altezza $h = 2a - k$, $K = GC$ essendo l'altezza del segmento supplementare.

Qui interviene lo stesso integrale, ma gli estremi di integrazione sono o e $2a - k$. Per rilevare la trasformazione che se ne deduce con il metodo archimedeo, basterà osservare che l'area di un cerchio segato nel cono ADB da un piano parallelo alla base per un punto d'ascissa x è

$$\frac{\pi \; k}{2a - k} \, x^2.$$

Si ha dunque in questo caso:

$$\pi \int_0^{2a-k} (2ax - x^2) \, dx = \frac{a + k}{2a - k} \int_0^{2a-k} x^2 \, dx$$

Si vede facilmente che ponendo $k = 0$ si ritrova la formula precedentemente stabilita per lo stesso integrale esteso da 0 a $2a$.

Volendo determinare la cubatura dell'ellissoide con lo stesso metodo si ricade nell'integrazione della funzione

$$y^2 = \frac{p}{a}(2ax - x^2),$$

e quindi in un integrale dello stesso tipo di quello ora considerato.

Anche ARCHIMEDE ripete gli stessi ragionamenti fatti nel caso della sfera e arriva agli stessi risultati, non credendo neppure opportuno indugiarsi a sviluppare il caso relativo al segmento d'ellissoide (prop. III, VIII).

c) *Volume dell'unghia cilindrica*; proposizioni XII, XIII, XIV.

Assumiamo come piano xy una delle faccie del cubo e precisamente quella su cui giace il circolo base del cilindro, per asse x il diametro parallelo OQ, per asse y la tangente ZB e per asse z la perpendicolare al detto piano innalzata dal punto di con-

tatto; l'equazione del circolo e del piano secante è rispettivamente:

$$y^2 = 2ax - x^2; \qquad 2x + z - 2^a = 0.$$

Inoltre è

$$ST = 2\sqrt{2ax - x^2}; \quad NU = 2\,(a - x),$$

posto a uguale al raggio del circolo.

Un piano perpendicolare alla base sega il semicilindro e il segmento cilindrico secondo due parallelogrammi, per i quali si ha

$$\text{paralgr. semicilindro} = 2a\,.\,ST = 4a\sqrt{2ax - x^2},$$
$$\text{paralgr. segm. cilindr.} = ST\,.\,NU = 4\,(a - x)\sqrt{2ax - x^2}.$$

Un parallelogrammo del semicilindro, rimanendo al suo posto, fa equilibrio al corrispondente parallelogrammo del segmento cilindrico sospeso nell'estremo opposto dello stesso diametro, rispetto al centro H.

Ma tutti i parallelogrammi che si possono ottenere in questo modo formano il semicilindro e il segmento cilindrico. Quindi

$$HY.\,4a\int_0^a \sqrt{2ax - x^2}\,dx = 4a\int_0^a (a - x)\sqrt{2ax - x^2}\,dx,$$

dove si è indicato con HY la distanza da H del centro di gravità del semicilindro.

Nella prop. XIII lo stesso semicilindro viene confrontato con il prisma (HGM).

Il semicilindro e il prisma sono segati con piani paralleli al piano xz. I rettangoli ottenuti con un piano d'ordinata y $(= HS)$, sono

$$\text{paralgr. semicil.} = 2a \,.\, KS = 2a\sqrt{a^2 - y^2},$$
$$\text{paralgr. prisma} = 2a \,.\, LX = 2a\,(a - y).$$

Onde,

$$(\text{semicil.}) = 4a\int_0^a \sqrt{a^2 - y^2}\, dy,$$

$$(\text{prisma}) = 4a\int_0^a (a - y)\, dy.$$

Ora qui trova che

$$HY.\ (\text{semicil.}) = \frac{2}{3}\,a\ \ (\text{prisma}).$$

Confrontando con la relazione precedente, risulta

$$4a\int_0^a (a - x)\sqrt{2ax - x^2}\, dx = \frac{8}{3}\,a\int_0^a (a - y)\, dy$$

$$= \frac{4}{3}\,a^3,$$

il secondo integrale essendo noto, perchè espressione del volume del prisma (HGM).

La prop. XIV è notevole per l'uso della parabola EFG, che possiamo rappresentare con l'equazione $y^2 = ax$, riferita al diametro FH e alla tangente DC. Con l'aiuto di essa ARCHIMEDE risolve il suo problema in una maniera più breve e più elegante della precedente.

Il volume del segmento cilindrico è ottenuto sommando le sezioni triangolari prodotte da piani paralleli al piano $x\ z$. Un piano infatti per MN sega il prisma circoscritto al segmento secondo triangoli rettangoli che hanno per base $M\ N$ e per altezza $2a$, e la cui superficie è pertanto a^2. Lo stesso piano sega il segmento cilindrico secondo triangoli rettangoli che hanno per base MO $(= \sqrt{a^2 - y^2})$ e per altezza z (= NU della fig. a pag. 169) $= 2\sqrt{a^2 - y^2}$, la cui area è $(a^2 - y^2)$. Onde segue che il volume del segmento cilindrico è espresso da

$$2\int_0^a (a^2 - y^2)\ dy.$$

Per calcolare quest'integrale ARCHIMEDE osserva che

prisma triangolare (CE): segm. cilindrico = paralgr. (CE): segm. parabolico e cioè:

$$2a^3 : 2\int_0^a (a^2 - y^2)\, dy = 2a^2 : 2\int_0^a \left(a - \frac{y^2}{a}\right) dy$$

da cui

$$2\int_0^a (a^2 - y^2)\, dy = a \,.\, 2\int_0^a \left(a - \frac{y^2}{a}\right) dy.$$

Ma l'integrale a secondo membro rappresenta l'area del segmento parabolico che è uguale ai $\frac{2}{3}$ del rettangolo (CE), e quindi a $\frac{4}{3}\, a^2$; dunque

$$2\int_0^a (a^2 - y^2)\, dy = \frac{4}{3}\, a^3.$$

5. — **Formule fondamentali di cui fa uso Archimede nelle dimostrazioni geometriche relative alle quadrature e alle cubature.**

Gli esempi precedenti ci offrono una serie di risultati, che valutati nelle condizioni in cui si trovava allora la geometria non possiamo esitare a chiamare veramente brillanti e quasi portentosi. Essi son dovuti all'intuito e all'audacia di un uomo

di genio, che non si arrestò davanti alle novità dei problemi, perchè non temette tentare vie nuove.

Ma ARCHIMEDE avrebbe lasciato la sua opera incompiuta, se non avesse tentato di ricollegarla alla rigida tradizione della geometria greca. Ciò egli fece meravigliosamente bene, riuscendo a convalidare i risultati ottenuti con dimostrazioni rigorose di tipo eudossiano.

Esamineremo adesso queste dimostrazioni, che rappresentano la sistemazione critica dei procedimenti infinitesimali anteriormente usati, e di cui sarà facile scorgere il fondamento logico, identico a quello su cui si basa tuttora l'esposizione critica degli stessi procedimenti.

In queste dimostrazioni si fa uso di alcune formule che meritano di essere subito segnalate. Esse sono di natura algebrica, sebbene espresse in linguaggio geometrico.

a) *Sia data una serie di superficie* A, B, C, D,.. Z, *di cui sia* A *la maggiore e ciascuna sia il quadruplo della seguente: allora si ha la relazione*

$$A + B + C + \dots + Z + \frac{1}{3} Z = \frac{4}{3} A.$$

(*Quadratura della parabola*, prop. 23).

L'equivalente algebrico di questa proposizione è manifestamente:

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \ldots + \frac{1}{4^{n-1}} = \frac{4}{3} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4^{n-1}}$$

$$= \frac{1 - \frac{1}{4^n}}{1 - \frac{1}{4}} .$$

b) *Se le grandezze* A_1, A_2, ..., A_n, *costituiscono una progressione aritmetica crescente, la cui ragione è uguale alla più piccola di esse* A_1, *si ha*

$$n \cdot A_n < 2\ (A_1 + A_2 + \ldots + A_n).$$

$$n \cdot A_n > 2\ (A_1 + A_2 + \ldots + A_{n-1}).$$

(*Sui Conoidi*, ecc.; lemma prima della prop. 1).

Infatti posto $A_1 = a$, si ha

$$S_n = A_1 + A_2 + \ldots + A_n = \frac{1}{2} n\,(n + 1)\,a$$

e quindi $\quad 2\,S_{n-1} < n^2 a < 2\,S_n$.

Si supponga $A_n = na = b$, e perciò $a = \frac{b}{n}$; si avrà

$$\frac{1}{2} b^2 < a \; (a + 2a + \; . \; . \; . \; . \; + na)$$

$$\frac{1}{2} b^2 > a \; (a + 2a + \; . \; . \; . \; . \; + [n - 1] \; a).$$

Di queste disuguaglianze ARCHIMEDE si serve nel calcolo del volume di un segmento di paraboloide. Ivi si suppone che a possa diventare piccolo ad arbitrio. La disuguaglianza resta valida comunque piccolo si prenda a; e mediante esse si dimostra che per a tendente a zero, risulta

$$lim \;\; S_n = \frac{1}{2} b^2 .$$

Ora, noi possiamo rappresentare la suddetta progressione con i valori della funzione.

$$y = x$$

nell'intervallo (o, b) per $x = a, 2a, \; . \; . \; . \; (n-1) \; a, b$ e allora il limite di S_n per a tendente a zero sarà l'***integrale di*** y ***da*** o ***a*** b. Nelle relazioni accennate si

ha dunque il modo di calcolare questo integrale e l'equivalente della nostra formula.

$$\int_0^b x\,dx = \frac{1}{2}\,b^2 .$$

c) *Se* n *segmenti* $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *costituiscono una progressione aritmetica crescente, in cui la differenza comune sia uguale al minimo di essi* A_1, *si ha*

$$(n+1)\;A_n^2 + A_1(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) =$$
$$= 3\,(A_1^2 + A_2^2 + \ldots + A_n^2)\,.$$

(*Sulle spirali,* prop. 10).

Da ciò segue che

$$n\,.\,A_n^2 < 3\,(A_1^2 + A_2^2 + \ldots + A_n^2)$$
$$n\,.\,A_n^2 > 3\,(A_1^2 + A_2^2 + \ldots + A_{n-1}^2)\,.$$

Le stesse relazioni valgono in generale se in luogo dei quadrati si considerino figure simili.

(*Ibidem,* coroll.).

Si ponga $A_1 = a$, $A_2 = 2a, \ldots, A_n = na$; sarà

$$(n+1)\;n^2a^2 + a\,(a + 2a + \ldots + na) =$$
$$= 3\,(a^2 + 2^2\,a^2 + \ldots + n^2\,a^2),$$

cioè

$$(n + 1)\, n^2 a^2 + a^2 \cdot \frac{1}{2}\, n\, (n + 1) =$$

$$= 3\, (a^2 + 2^2 a^2 + \ldots + n^2 a^2)\,,$$

da cui

$$a^2 \cdot \frac{1}{2}\, n\, (n+1)\, (2\,n + 1) = 3\, (a^2 + 2^2 a^2 + \ldots + n^2 a^2).$$

Osserviamo subito come questa relazione dà la somma dei quadrati dei primi n numeri naturali (posto $a = 1$).

Da essa inoltre, osservando che

$$a^2 \cdot \frac{1}{2}\, n\, (n + 1)\, (2n + 1) = a^2 \cdot n^3 \left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(1 + \frac{1}{2n}\right),$$

segue immediatamente

$$3\, (a^2 + 2^2 a^2 + \ldots\ldots + [n - 1]^2\, a^2)$$
$$< a^2 n^3 < (a^2 + 2^2 a^2 + \ldots\ldots + n^2 a^2).$$

È sommamente interessante rilevare l'uso che fa ARCHIMEDE di questa disuguaglianza, per calcolare l'area di un arco di spirale.

A_n rappresenta un segmento di lunghezza determinata; $A_1, A_2, \ldots\ldots, A_{n-1}$ dei suoi sottomultipli;

è supposto che questi possano diventare piccoli come si vuole.

Posto allora $A_n = b$; $A_1 = a = \frac{b}{n}$, potremo scrivere:

$$\frac{1}{3} b^3 < a\,(a^2 + 2^2\, a^2 + \ . \ . \ . + n^2\, a^2)$$

$$\frac{1}{3} b^3 > a\,(a^2 + 2^2 + a^2 + \ . \ . \ . + [n - 1]^2\, a^2)\,.$$

Queste disuguaglianze valgono comunque piccolo si prenda a. ARCHIMEDE effettivamente se ne è valso per dedurre, con il solito ragionamento per assurdo, che, quando a tende a zero, le due somme assumono precisamente il valore $\frac{1}{3}\, b^3$.

Ora osserviamo che la serie dei quadrati A_1^2, A_2^2, . . . corrispondono ai valori della funzione

$$y = x^2$$

nell'intervallo (o, b) per $x = a,\ 2a, \ . \ . \ ., (n - 1)\, a$, b e l'integrale di y è appunto il valore comune delle due somme considerate, quando si fa tendere a zero a. Dimodochè anche queste disuguaglianze

servono ad eseguire una integrazione ed equivalgono alla formula

$$\int_0^b x^2\, dx = \frac{1}{3} b^3.$$

Di queste stesse relazioni fa uso ARCHIMEDE nella cubatura del semiellissoide e cioè per calcolare il valore di

$$\int_0^a (2ax - x^2)\, dx$$

Data la funzione

$$y = 2\,a\,x - x^2,$$

i valori di essi per $x = h, 2h, \ldots, (n-1)\,h, nh = a$, sono ordinatamente

$$h\,(2a - h),\ 2h\,(2a - 2h),\ \ldots,$$
$$(n-1)\,h\,[2a - (n-1)\,h],\ nh\,(2a - nh).$$

Con considerazioni geometriche ARCHIMEDE deduce che il rettangolo $x\,(2a - x)$, $2a$ essendo l'asse maggiore dell'ellissoide, è uguale alla differenza fra il quadrato del semiasse e del gnomone di larghezza x. Si ha infatti (EUCL. II. 5).

$$a\,(2a - x) + (a - x)^2 = a^2,$$

e perciò in generale

$$x\ (2a - x) = a^2 - (a - x)^2.$$

Dimodochè la serie soprascritta è uguale a quest'altra

$$a^2 - (a - h)^2\ ;\ a^2 - (a - 2h)^2\ ;\ \ldots\ ;$$
$$a^2 - [a - (n - 1)\ h]^2\ .$$

Allora si avrà

$$\sum_{(n-1)} (2\,a\,x_i - x_i^2) = (n-1)\,a^2 - \sum_{(n-1)} (x_i^2)$$
$$\sum_{(n)} (2\,a\,x_i - x_i^2) = n a^2 - \sum_{(n)} (x_i^2)$$

Per le relazioni precedenti è

$$(n - 1)\ a^2 < 3 \sum_{(n-1)} (x_i^2)$$
$$n\,a^2 > 3 \sum_{(n)} (x_i^2)\ .$$

Quindi

$$(n - 1)\ a^2 - \sum_{(n-1)} (x_i^2) < n a^2 - \frac{1}{3}\, n\, a^2$$

$$(\text{poichè}\ \ (n-1)\,a^2 < n\,a^2)$$

$$< \frac{2}{3}\, n a^2\ ,$$

$$n a^2 - \sum_{(n)} (x_i^2) > n a^2 - \frac{1}{3} n a^2$$

$$> \frac{2}{3} n a^2 .$$

Ne segue che

$$\sum_{(n-1)} (2 a x_i - x_i^2) < \frac{2}{3} n a^2 < \sum_{(n)} (2 a x_i - x_i^2) ,$$

o anche

$$h \sum_{(n-1)} (2 a x_i - x_i^2) < \frac{2}{3} a^3 < h \sum_{(n)} (2 a x_i - x_i^2) .$$

Ciò posto, ARCHIMEDE dimostra che, se h tende a zero, le due somme tendono allo stesso limite; e cioè che

$$\lim_{h \to 0} \sum_{(n-1)} = \lim_{h \to 0} \sum_{(n)} = \frac{2}{3} a^3 .$$

È, come si vede, la dimostrazione della formula

$$\int_0^a (2 a x - x^2)\, dx = a^3 - \frac{1}{3} a^3 = \frac{2}{3} a^3$$

d) *Se* n *segmenti* $A_1, A_2, \ldots\ldots, A_n$ *costituiscono una progressione aritmetica crescente, si ha*

$$(n - 1)\, A_n^2 : (A_n^2 + A_{n-1}^2 + \ldots + A_2^2)$$

$$< A_n^2 : \left[A_n A_1 + \frac{1}{3}(A_n - A_1)^2\right]$$

$$(n - 1)\, A_n^2 : (A_{n-1}^2 + \ldots\ldots + A_1^2)$$

$$> A_n^2 : \left[A_n A_1 + \frac{1}{3}(A_n - A_1)^2\right]$$

(*Sulle spirali*, prop. 11).

Se h è la ragione della progressione e $A_1 = a$, potremo scrivere la prima disuguaglianza in questo modo:

$$\frac{(n-1)\,[a + (n-1)\,h]^2}{[a + (n-1)\,h]^2 + \ldots\ldots + (a+h)^2}$$

$$< \frac{[a + (n-1)\,h]^2}{[a + (n-1)\,h]\;\; a + \frac{1}{3}\;[(n-1)\,h^2]}$$

Ora il valore della somma a denominatore nella prima frazione è

$$S_n = (n-1)\,a^2 + \frac{1}{6}\,h^2\,(n-1)\,n\,(2\,n-1) + a\,h\,(n-1)\,n$$

$$= (n-1)\;\left[(a + nh)\;a + \frac{1}{6}\,h^2\,n\,(2n-1)\right] .$$

Ma per la relazione precedente (prop. 10) è

$$\frac{1}{3}(n-1)\ [(n-1)\ h]^2 < \frac{1}{6} h^2 (n-1)\, n\, (2\, n-1)\,,$$

perciò

$$\frac{1}{3}[(n-1)\ h]^2 < \frac{1}{6} h^2 n\, (2\, n-1)\,;$$

donde si deduce facilmente la disuguaglianza.

Analogamente per la seconda disuguaglianza.

$$\frac{(n-1)\ [a+(n-1)\ h]^2}{[a+(n-2)\ h]^2+\ldots\ldots+a^2} >$$

$$> \frac{[a+(n-1)\ h]^2}{[a+(n-1)\ h]\ a+\frac{1}{3}[(n-1)\ h^2]}$$

Ora se poniamo $A_n = b$ e ricordiamo che

$$A_n - A_1 = b - a = (n-1)\ h\ ,$$

si ha

$$S_{n-1} < \frac{b-a}{h}\,[ba+\frac{1}{3}(b-a)]^2 < S_n\ .$$

Ma la stessa relazione vale anche per h comunque piccolo, mentre è sempre $a+(n-1)\ \ h = c$;

quindi si vede come queste relazioni conducono a stabilire che

$$\lim_{h \to 0} h\, S_{n-1} = \lim_{h \to 0} h\, S_n = (b - a)\left[ba + \frac{1}{3}(b-a)\right]^2$$

$$= \frac{1}{3}(b^3 - a^3)\ ,$$

e cioè a dimostrare che

$$\int_a^b x^2 dx = \frac{1}{3}(b^3 - a^3)\ .$$

e) *Siano date la superficie* $A_1, A_2, \ldots A_n$ *tali che*

$$A_1 = ah + h^2$$
$$A_2 = a\ .\ 2h + (2h)^2$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$A_n = a\ .\ nh + (nh)^2\ ;$$

si ha

$$n\,.\,A_n : (A_1 + A_2 + \ldots + A_n) < (a + nh) : \left(\frac{a}{2} + \frac{nh}{3}\right)$$

$$n\,.\,A_n : (A_1 + A_2 + \ldots + A_{n-1}) > (a + nh) : \left(\frac{a}{2} + \frac{nh}{30}\right).$$

(*Sui conoidi* ecc., prop. 2).

Infatti è

$$S_n = A_1 + A_2 + \ldots + A_n =$$
$$= a\,(h + 2h + \ldots + nh) + h^2\,(1^2 + 2^2 + \ldots + n^2),$$
$$S_{n-1} = A_1 + A_2 + \ldots A_{n-1} =$$
$$= a\,(h + 2h + \ldots \overline{n-1}\,h) +$$
$$+ h^2\,(1^2 + 2^2 + \ldots + \overline{n-1}^2)\,.$$

Secondo proposizioni precedenti

$$n\,.\,a\,n\,h < 2\,a\,(h + 2h + \ldots + nh)$$
$$> 2\,a\,(h + 2h + \ldots \overline{n-1}h)\,;$$
$$n\,.\,(nh)^2 < 3\,h^2\,(1^2 + 2^2 + \ldots + n^2)$$
$$> 3\,h^2\,(1^2 + 2^2 + \ldots + \overline{n-1}^2)\,.$$

Perciò è

$$S_{n-1} < \frac{a\,n^2\,h}{2} + \frac{n\,(n\,h)^2}{3} < S_n\,.$$

Da cui, osservando che $n\,.\,A_n = a\,n^2 h + n\,.\,(nh)^2$, si ricavano facilmente le disuguaglianze superiori.

D'altra parte è

$$S_n = \frac{1}{6}\,hn\,(n+1)\,[3a + h\,(2\,n + 1)]$$

$$S_{n-1} = \frac{1}{6}\,h\,(n-1)\,n\,[3a + h\,(2\,n - 1)\,],$$

e

$$\frac{\frac{a}{2} + \frac{nh}{3}}{a + nh} \cdot n A_n = \frac{1}{6} n^2 h (3a + 2nh) ;$$

si ha dunque per le stesse disuguaglianze

$$S_{n-1} < \frac{n^2 h}{6} (3a + 2nh) < S_n ,$$

ossia, posto $n h = c$,

$$h \cdot S_{n-1} < \left(\frac{a}{2} + \frac{c}{3}\right) c^2 < h \cdot S_n .$$

Archimede si serve di queste disuguaglianze per calcolare il volume di un segmento di iperboloide. Supposto che h possa diventare piccolo ad arbitrio, egli dimostra che, quando h tende a zero è

$$\lim h \cdot S_{n-1} = \lim h \cdot S_n = \left(\frac{a}{2} + \frac{c}{3}\right) c^2$$

Si osservi che $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sono i valori della funzione

$$y = ax + x^2$$

nell'intervallo (o, c) per $x = h, 2h, \ldots, nh = c$. Al-

lora il limite comune di $h \, . \, S_{n-1}$, e $h \, . \, S_n$ non è che l'integrale di y da o a c; e precisamente

$$\int_o^c (ax + x^2) \, dx = \frac{1}{2} ac^2 + \frac{1}{3} c^3 .$$

A questa formula conducono le due disuguaglianze ora ricordate e il ragionamento per esaustione di ARCHIMEDE.

Delle stesse relazioni si serve ARCHIMEDE nella nella cubatura di un segmento di ellissoide minore della metà, per calcolare cioè l'integrale della funzione.

$$y = 2\,a\,x - x^2$$

da o a $k < a$:

La somma dei valori di y per $x = h, \; 2h, \ldots\ldots, (n-1)\,h, \; nh = k$ è

$$\sum\nolimits_n = h\,(2\,a - h) + 2\,h\,(2\,a - 2\,h) + \ldots\ldots + (n-1)\,h\,[\,2\,a - (n-1)\,h\,] + nh\,(2\,a - n\,h).$$

Con considerazioni geometriche ARCHIMEDE stabilisce che

$$k\,(2a - k) - x\,(2a - x) = (k - x)\,(2a - k - x) = (k - x)\,(2a - 2k) + (k - x)^2 .$$

Indicando allora con A_i il valore di questa differenza, si avrà successivamente

$$A_1 = (2a - 2k)\ h + h^2, \qquad \text{per } x = (n - 1)\ h$$
$$A_2 = (2a - 2k)\ 2h + (2h)^2, \quad \text{per } x = (n - 2)\ h$$
$$\ldots \quad . \quad \ldots\ldots$$
$$A_{n-2} = (2a - 2k)\ (n - 2)\ h + [(n - 2)\ h]^2,$$
$$A_{n-1} = (2a - 2k)\ (n - 1)\ h + [(n - 1)\ h]^2,$$
$$A_n, \quad = k\ (2a - k), \qquad\qquad \text{per } x = 0$$

e per $x = nh$ si ha $A_0 = 0$. Segue pertanto che

$$nk\ (2a - k) - S_n\ (A_i) = \sum\nolimits_{(n-1)} (2a\ x - x^2)$$
$$nk\ (2a - k) - S_{(n-1)}\ (A_i) = \sum\nolimits_n (2ax - x^2)$$

Per le precedenti relazioni si ha

$$1)\quad nk\ (2a - k) : S_n\ (A_i) < (2a - k) : \left(a - \frac{2}{3}\ k\right),$$

da cui

$$nk\ (2a - k) : nk\ (2a - k) - S_n\ (A_i) > (2a - k) : \\ : \left(a - \frac{1}{3}\ k\right);$$

$$2)\quad nk\ (2a - k) : S_{(n-1)}\ (A_i) > (2a - k) : \left(a - \frac{2}{3}\ k\right),$$

da cui

$$nk\,(2a - k) : nk\,(2a - k) - S_{(n-1)}, (A_i)$$
$$< (2a - k) : \left(a - \frac{1}{3}k\right),$$

e perciò

$$nk\,(2a - k) : \sum_{(n-1)} (2ax - x^2) > (2a - k) : \left(a - \frac{1}{3}k\right)$$

$$nk\,(2a - k) : \sum_n (2ax - x^2) < (2a - k) : \left(a - \frac{1}{3}k\right).$$

Ne risulta che

$$\sum_{(n-1)} < \frac{1}{3}nk\,(3a - k) < \sum_{(n)};$$

ossia, essendo $k = nh$,

$$h \,.\, \sum_{(n-1)} < ak^2 + \frac{1}{3}k^3 < h \,.\, \sum_n .$$

Quando si fa tendere h a zero, risulta inoltre

$$\lim h \,.\, \sum_{(n-1)} = \lim h \,.\, \sum_n = ak + \frac{1}{3}h^3;$$

è ciò che dimostra ARCHIMEDE ragionando, come sempre, per assurdo.

Ora il predetto limite è il valore dell'integrale

$$\int_0^k (2ax - x^2)\, dx .$$

6. – **La quadratura della parabola.**

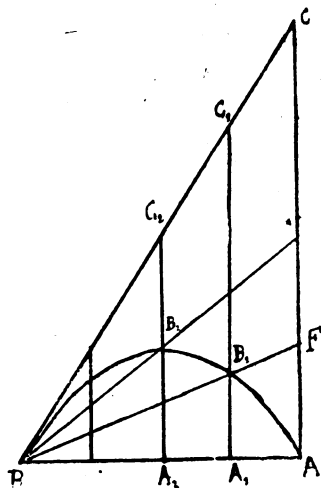
ARCHIMEDE ha dedicato alla quadratura della parabola tutto l'opuscolo che porta questo nome e che si compone di 24 proposizioni. In esso sono esposte due dimostrazioni.

La prima, che occupa le proposizioni 1-17, è di natura meccanica; vi è applicata la teoria della leva e mediante il principio dei momenti è determinata la relazione fra il segmento parabolico e il triangolo formato dalla stessa base del segmento, dalla tangente in uno estremo e dalla parallela all'asse per l'altro estremo.

Le prime 13 proposizioni contengono delle premesse geometriche e meccaniche per la dimostrazione, la quale si inizia propriamente con la proposizione 14.

Sia AB la base del segmento parabolico che supporremo perpendicolare all'asse. Conducendo da B la tangente alla parabola e da A la parallela all'asse si ha il triangolo rettangolo ABC.

Si divida AB in n parti uguali nei punti A_1, A_2, ..., e dai punti di divisione si innalzino le perpendicolari A_1C_1, A_2C_2 , ... Il triangolo viene così decomposto nei trapezi (A_1C), (A_2C_1),... Condu-

cendo le BB_1, BB_2, ... si avrà una figura circoscritta S'_n composta dei trapezi (A_1F), (A_2F_1), ... e una figura inscritta S_n, composta dei trapezi (A_2, B_1), $(A_3 B_2)$, ...

Per una proprietà della parabola (dimostrata nella prop. 5) si ha:

$$AB : AA_1 = A_1C_1 : A_1B_1 ;$$

da cui, essendo

$$A_1C_1 : A_1B_1 = (A_1C) : (A_1F) ,$$

risulta

$$(A_1C) : (A_1F) = AB : AA_1 .$$

Si immagini che BA, prolungata oltre A, sia una leva con il punto d'appoggio in A. La precedente relazione dice che il trapezio $(A_1 F)$ trasportato sull'altro braccio della leva e sospeso con il suo centro di gravità ad una distanza uguale ad AB da A, fa equilibrio al trapezio (A_1C), supposto questo sospeso con il suo centro di gravità nel punto A_1. Ma se il trapezio (A_1C) rimane al suo posto, il suo centro di gravità ha da AC una distanza d' minore di A_1A; onde:

$$(A_1C) \,.\, d' < BA \,.\, (A_1F) .$$

Analoghe relazioni si avranno per tutti gli altri trapezi; perciò, immaginando tutti gli elementi della figura circoscritta sospesi per il loro centro di gravità alla distanza AB da A sul prolungamento di BA, e mentre il triangolo rimane al suo posto, si ha

$$(BAC) \,.\, d < BA \,.\, S'_n ,$$

dove si è indicato con d la distanza da AC del centro di gravità del triangolo.

Ma è $d = \frac{1}{3} \cdot BA$; dunque

$$S'_n > \frac{1}{3} (ABC) .$$

Considerando ora anche la figura S_n inscritta si ha

$$AB : AA_1 = (A_2\, C_1) : (A_2\, B_1),$$

Da questa, ragionando come precedentemente, si ricava, chiamando d'' la distanza da AC del centro di gravità del trapezio $(A_2\, C_1)$ ed essendo $AA_1 < d''$, che:

$$(A_2\, C_1) \cdot d'' > AB \cdot (A_2\, B_1);$$

e quindi

$$(BAC) \cdot d > BA \cdot S_n ,$$

ossia

$$S_n < \frac{1}{3} (ABC) .$$

È stato così dimostrato che

$$S_n < \frac{1}{3} (ABC) < S'_n$$

Nella prop. 15 conclude la stessa relazione per un segmento parabolico, la cui base non sia perpendicolare all'asse.

Nella prop. 16 dimostra che

$$\text{segmento parabolico} = \frac{1}{3}(ABC),$$

adoperando il solito procedimento di esaustione.

Si dimostra cioè che non può essere

$$\text{segmento parabolico} \gtrless \frac{1}{3}(ABC).$$

I) Si supponga (segm. parabolico) $> \frac{1}{3}(ABC)$.

Sia X = (segm. parabolico) $- \frac{1}{3}(ABC)$.

Siccome esiste un multiplo di X maggiore del triangolo ABC, per esempio mX, sarà anche possibile trovare un sottomultiplo dello stesso triangolo che sia minore di X (*postulato di* EUDOSSO). Ripetendo allora la costruzione precedente, si divida AB in un numero n di parti abbastanza grande finchè si abbia

$$(\text{triangolo } ABF) = X' < X,$$

e quindi

$$(\text{segm. parabolico}) - X' > \frac{1}{3}(ABC).$$

Ora, è

$$(\text{segm. parabolico}) < S'_n \quad \text{e} \quad S'_n - (ABF) = S_n,$$

quindi

$$(\text{segm. parabolico}) - X' < S_n,$$

e a maggior ragione

$$\frac{1}{3}(ABC) < S_n.$$

Ma ciò è impossibile, perchè $\frac{1}{3}(ABC) > S_n$, come fu dimostrato. Dunque dovrà essere

$$(\text{segm. parabolico}) \leqq \frac{1}{3}(ABC).$$

II) Si supponga allora

$$(\text{segm. parabolico}) < \frac{1}{3}(ABC).$$

Si trovi una grandezza $X'' < \frac{1}{3}(ABC) - (\text{segmento parabolico})$, e sia (triangolo ABF) $= X''$.

Sarà pertanto

$$(\text{segm. parabolico}) + (ABF) < \frac{1}{3}(ABC)$$

e anche

$$< S'_n ,$$

$$S'_n - (\text{segm. parabolico}) > (ABF).$$

Ma è invece

$$S'_n - (\text{segm. parabolico}) < (ABF).$$

Perciò è impossibile che sia, come fu supposto,

$$(\text{segm. parabolico}) < \frac{1}{3}(ABC).$$

Dunque è

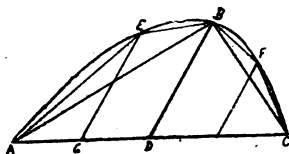
$$(\text{segm. parabolico}) = \frac{1}{3}(ABC).$$

È importante osservare come in questa dimostrazione venga in sostanza ripetuto il procedimento della 1ª prop. del *Metodo*. Qui però il procedimento stesso è reso rigoroso, eliminando ogni considerazione infinitesimale: alle corde sono sostituiti i trapezi e al passaggio al limite, necessario

per passare dagli scaloidi inscritto e circoscritto al segmento parabolico, si sostituisce la doppia riduzione all'assurdo.

Alla dimostrazione esposta ne segue subito un'altra (dalla prop. 18 alla prop. 24), che è completamente geometrica. In essa il segmento parabolico viene confrontato con il triangolo inscritto, avente la stessa base e la stessa altezza del segmento, e si è condotti alla somma della progressione geometrica.

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \dots$$

Sia il segmento parabolico *ABC*, di cui *A*, *C* siano gli estremi, *B* il vertice, *D* il punto di mezzo

della base. Si inscriva in esso il triangolo *ABC*. Nei segmenti *AB*, *BC* si inscrivano altri due triangoli *AEB*, *BFC* (*E*, *F* essendo le intersezioni dei diametri condotti per i punti di mezzo di *AB*, *BC*).

Ora è (prop. 19)

$$BD = \frac{4}{3} EG,$$

e (prop. 21)

$$\text{tr. } (ABC) = 8 \,.\, \text{tr. } (AEB) = 8 \,.\, \text{tr. } (BFC),$$

ossia

$$\text{tr. } (AEB) + \text{tr. } (BFC) = \frac{1}{4} + \text{tr. } (ABC).$$

Si inscriva allo stesso modo un triangolo in ciascuno dei segmenti *AE*, *EB*, *BF*, *FC*; ognuno di tali triangoli sarà $\frac{1}{8}$ del triangolo *AEB* o *BFC*; la loro somma sarà $\frac{1}{16}$ del triangolo *ABC*. E così continuando, ogni volta la somma dei nuovi triangoli sarà $\frac{1}{4}$ della somma precedente. Onde si avrà una superficie poligonale inscritta la cui area è

$$S_n = \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \ldots + \frac{1}{4^{n-1}}\right) ABC.$$

Se n è un numero finito si ha evidentemente

$$S_n < P, \qquad \text{(prop. 22)}$$

indicando con P l'area del segmento parabolico.

D'altra parte è in generale

$$S_n = \left(\frac{4}{3} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4^{n-1}}\right)(ABC) \qquad \text{(prop. 23).}$$

Perciò se il numero dei triangoli inscritti diventa infinitamente grande si avrà

$$\lim_{n \to \infty} S_n = P = \frac{4}{3}(ABC).$$

ARCHIMEDE, come al solito, evita questo passaggio al limite, e dimostra lo stesso risultato mediante la doppia riduzione all'assurdo.

I) Sia, se è possibile, $P > \frac{4}{3}(ABC)$.

Inscrivendo successivamente nel segmento ABC triangoli nel modo suddetto, e proseguendo l'operazione un numero di volte sufficientemente grande, potremo ottenere una superficie poligonale S_n tale che

$$P - S_n < P - \frac{4}{3}(ABC).$$

Ma allora risulterebbe

$$S_n > \frac{4}{3} (ABC);$$

il che è impossibile, per quel che fu già dimostrato.

II) Si supponga allora $P < \frac{4}{3} (ABC)$.

Inscrivendo, come prima, successivamente nel segmento ABC dei triangoli, otterremo alla fine una certa superficie S_n tale che si abbia

$$S_n - P \left[= \frac{1}{4^{n-1}} (ABC)\right] < \frac{4}{3} (ABC) - P.$$

Ma

$$\frac{4}{3} (ABC) = S_n + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4^{n-1}} (ABC);$$

quindi

$$\frac{4}{3} (ABC) - S_n < \frac{4}{3} (ABC) - P,$$

e cioè

$$S_n > P.$$

Ma questo è impossibile. Dunque

$$P = \frac{4}{3}(ABC) \qquad c.\ d.\ d.$$

7. – **Area della sfera e del segmento sferico.**

Alla fine della prop. II del *Metodo* ARCHIMEDE racconta come egli *divinò* il valore della superficie della sfera, deducendolo dal suo volume, supponendo una certa analogia di comportamento fra l'area e la superficie del cerchio e l'area e il volume della sfera.

Accingendosi a dimostrare le sue ricerche relative alla sfera egli volle dare la precedenza a questo risultato che sembrava il meno sicuramente stabilito e che costituiva ad ogni modo un risultato veramente brillante, contenendo il primo esempio della planificazione d'una superficie curva non sviluppabile.

Se si confronta la dimostrazione da lui ideata con la difficoltà del problema, non si può fare a meno di ammirarne la grande semplicità; il suo procedimento è entrato definitivamente nella tradizione geometrica e in grazia di esso il difficile

problema può essere accolto anche nei trattati elementari, che ripetono tuttora la dimostrazione archimedea, salvo lievi modificazioni che non ne modificano la sostanza.

Sia $ADA'D'$ il circolo massimo della sfera; si inscriva in esso un poligono regolare di 4_n lati AB, $BC, \ldots, A'B', B'C', \ldots$

Si dimostra facilmente (*Sulla sfera e sul cilindro*, I prop. 21) che

$$[1] \qquad (BB' + CC' + \ldots) : AA' = A'B : BA.$$

Ora, se il circolo e il poligono ruotano intorno al diametro AA', essi descrivono rispettivamente una superficie sferica S e una superficie poligonale S_n; ed è

$$S_n < S \qquad \text{(prop. 23).}$$

In particolare è

$$S_n = \pi \,.\, BA\,(BB' + CC' + \ldots) \text{ (prop. 24)}$$

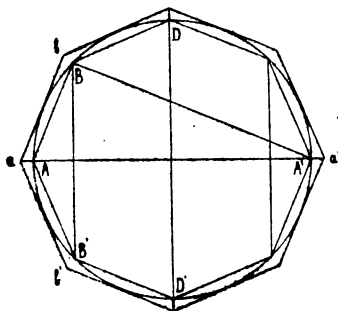
Inoltre,

$$BA\,(BB' + CC' + \ldots) = AA' \,.\, A'B < AA'^2,$$

essendo $A'B < AA'$; e quindi

$$S_n < 4\pi \cdot \left(\frac{AA'}{2}\right)^2,$$

ossia: la superficie S_n è minore del quadruplo della superficie del cerchio massimo della sfera (prop. 25).

Si circoscriva allo stesso circolo un poligono regolare di $4n$ lati, con i lati paralleli ai lati del poligono inscritto.

La superficie S_n' descritta da questo poligono ruotando intorno alla retta AA' è maggiore della superficie della sfera (prop. 28), ed è maggiore del quadruplo della superficie del cerchio massimo della sfera (prop. 30).

Infatti, indicando con ab, bc, . . . , ab', $b'c'$, . . . i lati di questo poligono e con aa' il diametro del cerchio ad esso circoscritto, si ha

$$S_n' = \pi \cdot ba \, (bb' + cc' + \ldots) \, .$$

D'altra parte è

$$ba\,(bb' + cc' + \ldots) = aa' \,.\, a'b \text{ (prop. 29)}$$
$$> a'b^2$$

perchè $aa' > a'b$.

Ma $a'b$ è maggiore di AA'; quindi

$$S_n' > 4\,\pi \,.\, \left(\frac{AA'}{2}\right)^2.$$

In conclusione è dunque

$$S_n < S < S_n' \text{ e } S_n < 4\,\pi \,.\, \left(\frac{AA'}{2}\right)^2 < S'_n \,.$$

Questi ragionamenti preparano la dimostrazione del teorema

$$S = 4\,\pi \,.\, \left(\frac{AA'}{2}\right)^2,$$

che viene svolta nella prop. 33, mediante il consueto metodo di esaustione.

Tale dimostrazione si ottiene ora facilmente con considerazioni di continuità. Infatti, si può aumentare il numero dei lati dei due poligoni in modo che le differenze

$$aa' - A\,A' \,;\, A\,A' - A'B \,;\, aa' - a'b \,;\, \ldots$$

diventino minori di una quantità prefissata comunque piccola. E allora diminuiranno corrispondentemente le differenze

$$4\pi\left(\frac{AA'}{2}\right)^2 - S_n \qquad S_n' - 4\pi\left(\frac{AA'}{2}\right)^2$$

Di modo che per un numero di lati infinitamente grande si può ritenere

$$4\pi\left(\frac{AA'}{2}\right)^2 = S_n = S_n'$$
$$= S.$$

Per mettere meglio in luce il valore dei ragionamenti di ARCHIMEDE possiamo riassumerli brevemente in formule trigonometriche.

Per il poligono inscritto si ha

$$AB = 2a \operatorname{sen}\frac{\pi}{4n}\,;\; BB' = 2_a \operatorname{sen}\frac{\pi}{2n}\,;$$

$$CC' = 2a \operatorname{sen}\frac{2\pi}{2n}\,;\ \text{ecc...}\ \text{ponendo}\ 2a = AA'\,.$$

Quindi

$$AB\,(BB' + CC' + \ldots)$$
$$= 2a \operatorname{sen}\frac{\pi}{4n}\left[2a \operatorname{sen}\frac{\pi}{2n} + 2a \operatorname{sen}\frac{2\pi}{2n} + \ldots\right]$$
$$= 4\,a^2 \operatorname{sen}\frac{\pi}{4n}\left(\operatorname{sen}\frac{\pi}{2n} + \operatorname{sen}\frac{2\pi}{2n} + \ldots\right)$$

Ora la relazione [1] dà la somma della serie che sta in parentesi, e cioè

$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{2n}+\operatorname{sen}\frac{2\pi}{2n}+\ldots\ldots+\operatorname{sen}\frac{2(n-1)\pi}{2n}$$

$$=\operatorname{cotg}\frac{\pi}{4n};$$

perciò

$$S_n=4\pi\, a^2\operatorname{sen}\frac{\pi}{4n},\operatorname{cotg}\frac{\pi}{4n}$$

$$=4\pi\, a^2\cos\frac{\pi}{4n}.$$

Formule analoghe si avranno per il poligono circoscritto; e in particolare

$$S'_n=4\pi\, a'^2\cos\frac{\pi}{4n},$$

essendo a' il raggio del circolo circoscritto al poligono.

Ma siccome $\quad a'=a:\cos\frac{\pi}{4n}$, è

$$S'_n=\frac{1}{\cos\frac{\pi}{4n}}4\pi\, a^2.$$

Onde

$$\lim_{n \to \infty} S_n = \lim_{n \to \infty} S'_n = 4\pi a^2,$$

e quindi

$$S = 4\pi a^2 .$$

Con lo stesso procedimento si arriva a calcolare la superficie s di un segmento sferico a una base di altezza h, appartenente a una sfera di raggio a. In un cerchio massimo di questa sfera si prenda un arco di ampiezza 2α, $\alpha < \pi$; in esso si inscriva e si circoscriva una poligonale di $2n$ lati (cfr. *Sulla sfera*, ecc., I, propp. 22, 35, 36, 37, 39, 40, 42, 43).

La superficie di rotazione generata dalle due poligonali è rispettivamente

$$s_n = 2\pi a^2 \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2n}$$

$$\left\{ 2\left[\operatorname{sen}\frac{\alpha}{n} + \operatorname{sen}\frac{2\alpha}{n} + \ldots + \operatorname{sen}\frac{(n-1)\alpha}{2}\right] + \operatorname{sen}\alpha \right.$$

$$= 2\pi a^2 . \cos\frac{\alpha}{2n}\left(1 - \cos\alpha\right);$$

$$s'_n = \frac{1}{\cos\frac{\alpha}{2n}} . 2\pi a^2 (1 - \cos\alpha) ;$$

e quindi

$$s = 2\pi a^2 (1 - \cos\alpha) ,$$

$$\text{(e siccome } a(1 - \cos\alpha) = h, \text{ è } s = 2\pi a h) .$$

È facile vedere come il procedimento di ARCHIMEDE in tutti e due i casi coincida con una integrazione.

Infatti, la superficie di rotazione generata dalla semicirconferenza ADA', ruotando intorno al diametro AA' (asse x), è

$$S = 2\pi \int_0^{2a} y ds$$

$$= 2\pi a^2 \int_0^{\pi} \operatorname{sen}\vartheta \, d\vartheta .$$

Ora quest'integrale si può calcolare come limite di una somma, dividendo l'intervallo di integrazione in $2n$ parti uguali; si avrà allora

$$2\pi a^2 \int_0^{\pi} \operatorname{sen}\vartheta \, d\vartheta =$$

$$= 2\pi a^2 . 2 \lim_{n \to \infty} \operatorname{sen}\frac{\pi}{4n}\left[\operatorname{sen}\frac{\pi}{2n} + \operatorname{sen}\frac{2\pi}{2n} + \ldots .\right],$$

ritornando così all'applicazione della [1].

Nel caso del segmento sferico si ha

$$s = 2\pi a^2 \int_0^\alpha \operatorname{sen} \vartheta \, d\vartheta .$$

8. – **Volume della sfera e del settore sferico.**

Con ragionamenti analoghi ai precedenti viene determinato il volume della sfera e del settore sferico. Vengono adoperate le stesse poligonali inscritte e circoscritte, e i volumi dei solidi di rotazione da queste generati vengono confrontati rispettivamente con il volume della sfera e del settore.

Il volume V_n del solido generato dalla poligonale inscritta è uguale a quello di un cono che ha per base un cerchio equivalente alla superficie di rotazione generata dalla stessa poligonale e per altezza l'apotema (prop. 26); quindi:

$$V_n = \frac{1}{3} \cdot 4\pi a^2 \cos\frac{\pi}{4n} \cdot a \cos\frac{\pi}{4n}$$

$$= \frac{1}{3} 4\pi a^3 \cos^2\frac{\pi}{4n},$$

$\left(\text{essendo apotema} = a \cos\frac{\pi}{4n}\right).$

Ne segue che

$$V_n < \frac{4}{3} \pi a^3 ,$$

minore cioè del quadruplo del cono X che ha per base un cerchio massimo della sfera e per altezza il raggio (prop. 27).

Analogamente per il solido di rotazione circoscritto si ha che il suo volume, V'_n è uguale a quello di un cono che ha per base un cerchio equivalente alla sua superficie laterale e per altezza il raggio della sfera (prop. 31), cioè:

$$V'_n = \frac{1}{3} \cdot 4 \pi a^3 \cdot \frac{1}{\cos \frac{\pi}{4n}}$$

e perciò

$$V'_n > \frac{4}{3} \pi a^3 = 4 X .$$

È quindi

$$V_n < 4 X < V'_n$$

e così pure per il volume V della sfera

$$V_n < V < V'_n .$$

Queste disuguaglianze valgono comunque grande si prenda il numero dei lati della poligonale. Ma

è chiaro che, aumentando questo numero, le differenze

$$4X - V_n \;,\; V'_n - 4X \;,$$
$$V - V_n \;,\; V'_n - \quad V$$

tendono a diminuire fino a zero. Cosicchè *al limite per* $n \to \infty$ si avrà

$$V_n = V'_n = 4X \;,$$

e quindi anche

$$V = 4X.$$

Questa conclusione è al solito dimostrata con il metodo di esaustione nella prop. 34.

Anche qui il procedimento archimedeo conduce facilmente ad effettuare un'integrazione.

Infatti volendo rappresentare il volume della sfera usando coordinate polari a, θ, φ si ha:

$$V = \frac{1}{3}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \operatorname{sen} \theta \, d\,\theta = \frac{2}{3}\pi a^3 \int_0^{\pi} \operatorname{sen} \theta \, d\,\theta \;;$$

l'ultimo integrale è calcolabile mediante la [1] del numero precedente.

Il calcolo del volume di un settore sferico si ottiene allo stesso modo (cfr. propp. 35, 38, 40,

41, 44), e si ha che detto volume è uguale a quello di un cono che ha per base un circolo equivalente alla superficie del segmento racchiuso dal settore e per altezza il raggio della sfera.

Cioè

$$v = \frac{2}{3} \pi a^3 \left(1 - \cos \alpha \right)$$

$$= \frac{2}{3} \pi a^2 h$$

Archimede tralascia qui la dimostrazione per il volume di un *segmento sferico*, che pure ha determinato nel *Metodo*. Ma tale volume si ottiene facilmente da quello del settore, osservando che esso è uguale a quello di un settore che ha la stessa superficie, aumentato o di minuito (secondo che è maggiore o minore di un emisfero) di un cono che ha per base un cerchio di raggio $a^2 - (a - h)^2 = h\,(2a - h)$ e per altezza $\pm\ (a - h)$.

Eseguendo le operazioni si ottiene per il volume di un segmento sferico di altezza h,

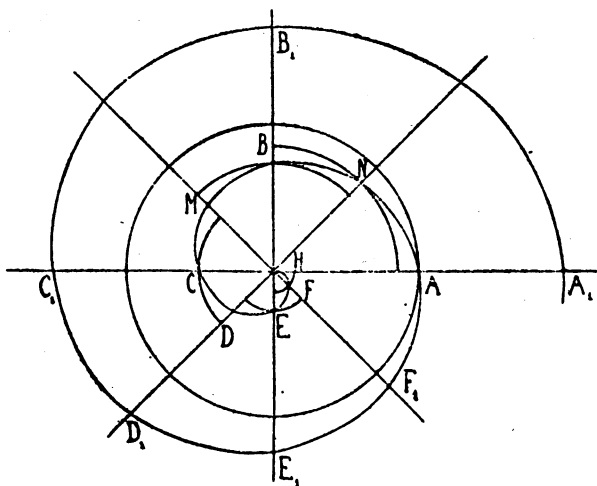
$$\frac{1}{3} \pi h^2 (3a - h).$$

9. - Area di una spirale.

Archimede fa anzitutto osservare (*Sulle spirali*, propp. 21, 22, 23) che a un arco qualunque di spirale si possono inscrivere e circoscrivere figure composte di settori circolari simili, tali che la figura circoscritta superi quella inscritta di una grandezza minore di qualsiasi altra grandezza. E siccome l'area limitata dall'arco di spirale è sempre compresa fra quelle delle figure inscritte e circoscritte, ne deduce che: 1) alla spirale si può circoscrivere una figura tale che la sua superficie sia maggiore di quella della spirale di una grandezza piccola a piacere; 2) alla spirale si può inscrivere una figura la cui superficie sia minore di quella della spirale di una grandezza piccola a piacere.

Passa quindi alla determinazione dell'area della prima spira, della seconda spira, di un settore compreso da un arco minore di una spira.

I) *Prop.* 24. Sia $ABCDH$ la prima spira di una spirale; H la sua origine, A l'estremo, HA la posizione iniziale della retta mobile. Si descriva il circolo di centro H e raggio HA, e si prendano su di esso, a partire da A, n angoli uguali.

Si consideri la figura inscritta A_1 e la figura circoscritta A'_n alla spira; la prima sarà composta di $n - 1'$ la seconda di n settori circolari. Sieno HF,

HE, ... i raggi di questi settori, a cominciare dal più piccolo; il maggiore sarà HA.

Ora questi raggi costituiscono una progressione aritmetica di ragione $h = HF$,

$$h, 2h, \ldots, nh = HA = a.$$

Perciò si avrà (prop. 10):

$$na^2 < 3[h^2 + (2h)^2 + \ldots + (nh)^2]$$

o anche

$$\pi a^2 < 3 \frac{\pi}{n} \left[h^2 + (2h)^2 + \ldots + (nh)^2 \right] ;$$

ossia, indicando con A'_n l'area della figura circoscritta e con C_1 l'area del cerchio circoscritto,

$$C_1 < 3 A'_n \; ; \; A'_n > \frac{1}{3} C_1 \, .$$

D'altra parte si ha anche:

$$na^2 > 3 \; [h^2 + (2h)^2 + \ldots + \{ (n - 1) \, h \}^2]$$

e

$$\pi a^2 > 3 \frac{\pi}{n} \left[h^2 + (2h)^2 + \ldots + \{ (n - 1) \, h \}^2 \right] ;$$

quindi

$$C_1 > 3 A_n \; ; \; A_n < \frac{1}{3} C_1 \, .$$

Dunque

$$A_n < \frac{1}{3} C_1 < A'_n \, .$$

Da questa con il solito metodo si conclude, indicando con R_1 l'area della prima spira, che

$$R_1 = \frac{1}{3} C_1 = \frac{1}{3} \pi a^2 .$$

II) *Prop.* 25. Sia $A\ F_1\ C_1\ B_1\ A_1$ la seconda spira, H l'origine della spirale, HA il segmento intercettato sul raggio vettore HA_1 dalla prima spira, AA_1 il segmento compreso fra il principio e il termine della seconda spira.

Si descriva il circolo di centro H e raggio HA_1 e si divida il circolo a partire da A_1 in n settori uguali.

Sia A_n la figura inscritta a A'_n la figura circoscritta alla spira. Anche qui i raggi dei singoli settori,

$$HA, \quad HF_1, \ldots, \quad HA_1,$$

costituiscono una progressione aritmetica, di ragione h; il minore è $HA = a$, il maggiore $HA_1 = 2a$:

$$a, \; a + h, \quad a + 2h, \ldots, \; a + nh = 2a.$$

Ora è (prop. 11):

$$\frac{n\ (2a)^2}{(a+h)^2 + (a+2\,h)^2 + \ldots + (2a)^2} < \frac{(2a)^2}{2a^2 + \frac{1}{3}a^2} <$$

$$< \frac{n\ (2a)^2}{a^2 + (a+h)^2 + \ldots + [a + (n-1)\ h]^2};$$

da cui

$$A_n < \frac{7}{12}\, C_2 < A'_n,$$

dove $C_2 = \pi\ (2a)^2$ indica l'area del cerchio circoscritto alla seconda spira.

Perciò l'area R_2 della seconda spira sarà

$$R_2 = \frac{7}{12} C_2$$

$$= \frac{7}{3} \pi a^2$$

$$= 7\ R_1.$$

III) Sia una spirale con l'origine in H. Si consideri l'arco che ha per estremi i punti M, N (diversi da H), minore di una spira.

Siano

$$HM = b, \qquad HN = c, \qquad c > b,$$

i raggi condotti agli estremi dell'arco. Si tratta di determinare l'area A del settore MHN.

Si descriva il circolo di centro H e raggio c, e sia α l'angolo del settore compreso fra le rette HM, HN. Si circoscriva al settore di spirale una figura V'_n composta di n settori circolari; i raggi di tali settori saranno successivamente

$$b + h,\ \ b + 2h, \ldots, b + (n-1)\ h,\ b + nh = c;$$

e quindi (prop. II):

$$\frac{\alpha c^2}{\frac{\alpha}{n}\left[(b+h)^2+\ldots+c^2\right]} < \frac{c^2}{cb+\frac{1}{3}(c-b)^2}.$$

Ossia, indicando con S l'area del settore circolare

$$\frac{S}{V'_n} < \frac{c^2}{c\,b+\frac{1}{3}(c-b)^2}.$$

In un modo analogo si inscriva nel settore MHN una figura A_n, i cui settori circolari abbiano i raggi

$$b,\ b+h,\ \ldots,\ b+(n-1)\,h.$$

Si avrà

$$\frac{S}{V_n} > \frac{c^2}{cb+\frac{1}{3}(c-b)^2}.$$

Pertanto è

$$\frac{V_n}{S} < \frac{cb+\frac{1}{3}(c-b)^2}{c^2} < \frac{V'_n}{S}.$$

Questo è vero qualunque sia il numero dei settori che compongono rispettivamente V_n e V'_n. Si può quindi concludere, ragionando per assurdo, che

$$\frac{A}{S} = \frac{cb + \frac{1}{3}(c-b)^2}{c^2}.$$

Ora, chiamando ϑ_2, ϑ_1, gli angoli fatti rispettivamente dai raggi vettori HN, HM con la posizione iniziale della retta mobile contati nel senso del movimento, è $\vartheta_2 - \vartheta_1 = \alpha$; e siccome

$$c = h\,\vartheta_2\,, \quad b = h\,\vartheta_1\,,$$

sarà

$$c - b = h\,(\vartheta_2 - \vartheta_1) \qquad \text{(prop. 15)}$$
$$= \frac{a}{2\pi}\,(\vartheta_2 - \vartheta_1).$$

Allora

$$S = \frac{\pi\,(c-b)}{a}\,c^2\,;$$

quindi

$$A = \frac{\pi}{a}\left[cb + \frac{1}{3}\,(c-b)^2\right](c-b)$$
$$= \frac{\pi}{3a}\,(c^3 - b^3).$$

La spirale d'ARCHIMEDE, com'è noto, si rappresenta ora con l'equazione

$$\rho = h\,\vartheta.$$

L'area d'una porzione di essa si calcola in generale mediante l'integrale

$$\frac{1}{2}\int_p^q \rho^2\, d\,\vartheta = \frac{\pi}{a}\int_p^q \rho^2\, d\,\rho.$$

Le determinazioni eseguite da ARCHIMEDE corrispondono perciò all'effettivo calcolo di questo integrale, per gli intervalli:

$$0 \ldots a\,; \quad a \ldots 2a\,; \quad b \ldots c.$$

10. - Area dell'ellisse.

Sia un'ellisse di assi $2a$ e $2b$, $a > b$. Sull'asse maggiore $2a$ come diametro si costruisca un circolo.

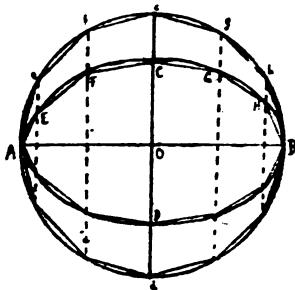
Prendendo come assi coordinati l'asse $2a$ e la tangente nell'estremo A, l'equazione del cerchio e dell'ellisse sarà

$$y'^2 = 2ax - x^2\,; \quad y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax - x^2),$$

donde si vede che

$$y' : y = a : b.$$

Si inscriva nel cerchio un poligono regolare di $4n$ lati; si conducano le ordinate dei vertici e si uni-

scano fra loro i punti in cui esse incontrano l'ellisse: si avrà un poligono inscritto nell'ellisse.

Sia P_n l'area del poligono inscritto nell'ellisse, P'_n quella del poligono inscritto nel cerchio, E quella dell'ellisse, C quella del cerchio.

Si avrà evidentemente

$$C > P'_n > E > P_n;$$

d'altra parte

$$\frac{a}{b} = \frac{y'}{y} = \frac{P'_n}{P_n}.$$

Ora

$$\lim_{n\to\infty} P'_n = E; \quad \lim_{n\to\infty} P'_n = C,$$

quindi

$$\frac{a}{b} = \frac{C}{E},$$

cioè: « la superficie dell'ellisse sta a quella del cerchio ad essa circoscritto come l'asse minore sta all'asse maggiore V. ».

È questo il teorema dimostrato da ARCHIMEDE nella prop. 4 *Sui Conoidi e sugli Sferoidi*; la dimostrazione è eseguita con il metodo euclideo (come in *Elem.* XII. 2); nella quale il passaggio al limite è sostituito da una doppia riduzione all'assurdo.

Però ARCHIMEDE scompone la superficie di ciascun poligono nella somma di 2 triangoli e $2n-2$ trapezi, aventi la stessa altezza x e per base rispettivamente y', y:

$$P'_n = \sum y'_i\, x; \quad P_n = \sum y_i\, x.$$

Perciò il suo ragionamento conduce a riguardare l'area del cerchio e dell'ellisse come il limite di quelle

somme, quando il numero dei lati diventi infinitamente grande; e cioè:

$$C = 2\int_0^{2a} y'\, dx = 2\int_0^{2a} \sqrt{2ax - x^2}\, dx;$$

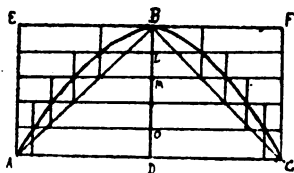
$$E = 2\int_0^{2a} y\, dx = \frac{2b}{a}\int_0^{2a} \sqrt{2ax - x^2}\, dx.$$

11. - **Volume di un segmento di paraboloide.** (*Sui Conoidi e sugli Sferoidi,* propp. 21, 22).

La parabola ABC sia la sezione del paraboloide con un piano per l'asse; AC la base del segmento parabolico, EF la tangente ad esso parallela a AC.

ARCHIMEDE distingue due casi: 1°) che la base del segmento di paraboloide sia perpendicolare all'asse (prop. 21), nel qual caso essa sarà un circolo di diametro AC; 2°) che la base non sia perpendicolare all'asse (prop. 22) e allora essa sarà un'ellisse, di cui AC è l'asse maggiore. La dimostrazione nei due casi si conduce allo stesso modo.

Si conduca per EF un piano parallelo alla base; il punto di contatto B sarà il vertice del segmento, la congiungente BD del vertice con il punto di mezzo di AC sarà il suo asse.

Si circoscriva al segmento un cilindro o un tronco di cilindro, $ACEF$, la cui superficie passi per la periferia del circolo, o dell'ellisse e che abbia per asse AD (come è insegnato nella prop. 9).

Si inscriva parimenti un cono o tronco di cono, ABC, che abbia per vertice B e per asse AD (prop. 8).

Si divida $BD = c$ in n parti uguali, nei punti L; $M, \ldots, O, D$, e sia $c = nh$. Per i punti di divisione si conducano dei piani paralleli alla base; questi segheranno il segmento di paraboloide, il cilindro circoscritto e il cono inscritto secondo circoli o ellissi. Indichiamo con y, a ($= CD$), v rispettivamente il raggio o il semiasse (parallelo a DC) di tali circoli o ellissi.

Si consideri lo scaloide V_n inscritto e lo scaloide V'_n circoscritto al segmento di paraboloide. È facile vedere che:

(un cilindro o tronco di cilindro
di $ACEF$): (cilindro o tronco di cil. di V_n) =
$= a^2 : y^2$
$= c : mh \quad (m = 1, 2, \ldots, n-1)$,

e quindi che

$$(ACEF) : V_n = n^2 h : [h + 2h + \ldots + (n - 1)h].$$

Similmente

$$(ACEF) : V'_n = n^2 h : [h + 2h + \ldots + n h].$$

Ma

$$h + 2h + \ldots + (n - 1)h < \frac{1}{2} n^2 h < h + 2h + \ldots + n h;$$

perciò anche

$$2 V_n < (ACEF) < 2 V'_n.$$

La differenza $V'_n - V_n$, aumentando opportunamente il numero delle divisioni, può diventare minore di una grandezza comunque piccola (prop. 19). Onde, per n infinitamente grande,

$$\lim V_n = \lim V'_n ,$$

e il valore comune di questi due limiti è precisamente il volume V del segmento di paraboloide, e perciò

$$V = \frac{1}{2} (ACEF).$$

A questo risultato perviene ARCHIMEDE, come al solito, con la doppia riduzione all'assurdo, fa-

cendo vedere che, date le conclusioni precedenti, non può essere

$$V >, \text{o} < \frac{1}{2}(ACEF).$$

Indichiamo con G l'area dell'ellisse, o circolo, base e con A l'area d'una sezione fatta da un piano parallelo alla base condotto per il punto d'ascissa a. Il metodo d'ARCHIMEDE consiste in sostanza nel calcolare il volume V del paraboloide come somma di tanti cilindri infinitesimi di base A e cioè

$$V = \int_0^c A\,dx.$$

Ora si ha

$$A : G = y^2 : a^2$$
$$= x : c$$

(per la proprietà della parabola).

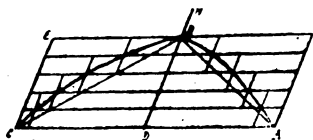
Perciò

$$V = \frac{G}{c}\int_0^c x\,dx$$
$$= \frac{1}{2} G\,c.$$

E così appare come gli stessi ragionamenti equivalgono a una vera integrazione.

12. – **Volume di un segmento di iperboloide.** (*Sui Conoidi* ecc., propp. 25, 26).

Si seghi il segmento di iperboloide con un piano per l'asse perpendicolare alla base; la sezione sia il segmento iperbolico (CBA), e H sia il centro dell'iperbole.

Si conduca EF parallela a CA e tangente al segmento iperbolico in B. La retta HB incontrerà

CA nel suo punto di mezzo D; dimodochè BH $(= a)$ sarà il semiasse traverso dell'iperboloide e B il vertice del segmento e BD il suo asse.

Per EF si conduca un piano parallelo alla base del segmento; questo piano sarà tangente in B all'iperboloide.

Ora: 1°) se la base del segmento è perpendicolare all'asse, essa sarà un cerchio di diametro $CA = 2b$; 2°) se la base non è perpendicolare all'asse, essa sarà un'ellisse avente per asse maggiore $CA = 3b$.

Nel primo o nel secondo caso si costruisca un cilindro o un tronco di cilindro, $ECAF$, che abbia per asse BD e passi per il cerchio o ellisse di base e parimenti un cono o un tronco di cono, CBA, con lo stesso asse BD e il vertice in B.

Si divida $BD = c$ in n parti uguali, e sia $c = nh$. Per i punti di divisione si conducano dei piani paralleli alla base; questi piani segheranno il cilindro circoscritto secondo circoli o ellissi aventi per raggio o per semiasse maggiore $DA = b$, e il segmento d'iperboloide secondo circoli ellissi aventi per raggio o per semiasse maggiore y_i, corrispondente all'ascissa $x_i = mh$ del punto di divisione (per $m = 1, 2, \ldots, n - 1$).

Si consideri ora lo scaloide cilindrico V_n inscritto e lo scaloide V'_n circoscritto al segmento di paraboloide. È facile dimostrare che

(un cil. o tronco di cil. di $ECAF$) : (cil. o tronco di cil. di V_n)

$$= b^2 : y_i^2;$$

$$= c\ (2a + c) : x_i\ (2a + x_i)$$

(per la proprietà dell'iperbole),

e quindi che

$$(\text{cil. } ECAF) : V_n = n \cdot c\,(2a + c) : \sum x_i\,(2a + x_i),$$

dove è

$$\sum x_i\,(2a + x_i) = (n - 1)\,h\,[2a + (n - 1)\,h] + \ldots . \\ + 2\,h\,(2a + 2\,h) + h\,(2a + h).$$

Per lo scaloide circoscritto V'_n si ha similmente

$$(\text{cil. } ECAF) : V'_n = n \cdot c\,(2a + c) : \sum x_i\,(2a + x_i),$$

estendendo la sommatoria da 1 a n.

Ma si ha (prop. 2) :

$$\frac{n \cdot c\,(2a + c)}{\sum_{n-1} x_i\,(2a + x_i)} > \frac{2a + c}{a + \frac{1}{3}\,c}$$

$$\frac{n \cdot c\,(2a + c)}{\sum_{n} x_i\,(2a + x_i)} < \frac{2a + c}{a + \frac{1}{3}\,c}.$$

Perciò anche, posto $C = $ cil. $ECAF$,

$$\frac{C}{V_n} > \frac{2a + c}{a + \frac{1}{3}\,c} > \frac{C}{V'_n},$$

ossia

$$V_n < \frac{a + \frac{1}{3} c}{2a + c} C < V'_n$$

Applicando anche qui le note considerazioni di continuità, si deduce che

volume iperboloide $$V = \frac{a + \frac{1}{3} c}{2a + c} C = \frac{3a + c}{2a + c} \cdot \frac{1}{3} C,$$

la quale formula esprime appunto il teorema dimostrato da ARCHIMEDE.

Ora siccome è

$$C = \pi c^2 \; (2a + c),$$

potremo anche scrivere

$$V = \pi c^2 \left(a + \frac{c}{3} \right),$$

che è la formula che noi otterremmo direttamente calcolando il volume del segmento con l'integrale

$$\pi \int_0^c (2ax + x^2) \; dx \, .$$

Del resto si scorge chiaramente che anche il procedimento d'ARCHIMEDE equivale sostanzialmente a un'integrazione; giacchè esso consiste nel calcolare la somma di tanti cilindri infinitesimi, i quadrati dei cui raggi formano la serie

$$2ah + h^2\,, \quad 2a\,.\,2h + (2h)^2\,, \quad 2a\,.\,3h + (3h)^2, \text{ ecc....}$$

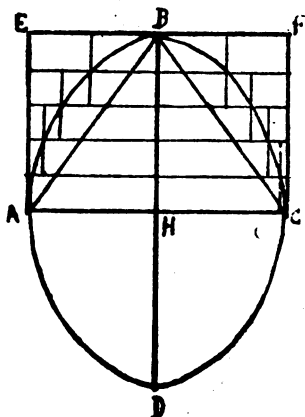
ARCHIMEDE calcola la somma di questa serie per il caso che il numero dei suoi termini diventi infinito e h infinitamente piccolo con le due disuguaglianze, che già notammo più sopra (a pag. 264); e il calcolo da lui eseguito non differisce da una vera integrazione, se non perchè esclude l'uso esplicito dei concetti infinitesimali.

13. – **Volume di un semiellissoide.** (*Sui conoidi*, ecc., propp. 27, 28).

Si seghi l'ellissoide con un piano per l'asse, e la sezione sia l'ellisse $ABCD$, di cui H sia il centro, $BD = 2a$, $CA = 2\,b$ gli assi, $a > b$. Sia inoltre segato l'ellissoide da un altro piano perpendicolare all'asse BD, passante per il centro H. Si deve calcolare il volume del semiellissoide CBA.

Si divida $BH = a$ in n parti uguali:

$$x_1 = \frac{a}{n} = h \; ; \; x_2 = 2h \; ; \; \dots \; ; \; a = nh \, .$$

Si circoscriva uno scaloide cilindrico V'_n e se ne inscriva un altro V_n e si immagini il cilindro C costruito sul circolo base di diametro CA e di altezza BH. Prolungando i piani delle basi di V_n anche il cilindro C resterà diviso in n cilindri, ciascuno uguale al massimo di quelli che formano V'_n. I raggi dei cilindri inscritti siano $y_1, y_2, \dots, y_{n-1}$; quelli dei cilindri circoscritti $y_1, y_2, \dots, y_n = b$.

Ora si ha

$$(\text{un cil. di } C) : (\text{cil. di } V_n) = b^2 : y_i^2 = a^2 : x_i \, (2a - x_i)$$

(per la proprietà dell'ellisse),

e quindi

$$C : V_n = na^2 : \sum x_i \, (2a - x_i) \, ,$$

dove è

$$\sum x_i\,(2a - x_i) = (n - 1)\,h\ \ [2a - (n - 1) + h] + \\ + \ldots + h\,(2a - h)$$

Ma osservando che in generale è

$$2a\ x - x^2 = a^2 - (a - x)^2\,,$$

la stessa sommatoria sarà anche uguale a

$$[a^2 - (n - 1)^2\,h^2] + \ldots . + (a^2 - 2^2\,h^2) + (a^2 - h^2),$$

o più brevemente

$$\sum_{(n-1)} (2ax - x^2) = (n - 1)\,a^2 - \sum_{(n-1)} (x_i^2).$$

Siccome è anche (prop. 10)

$$(n - 1)\,a^2 < 3\,\sum_{(n-1)} (x_i^2)\,,$$

facilmente si deduce che

$$\frac{3}{2}\sum_{(n-1)} (2ax_i - x_i^2) < na^2\,,$$

e perciò

$$\frac{C}{V_n} > \frac{3}{2}\,.$$

Considerando lo scaloide circoscritto V'_n si ha analogamente

$$C : V'_n = na^2 : \sum x_i (2a - x_i) \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

In questo caso è

$$\Sigma_n (2ax_i - x_i^2) = na^2 - \Sigma_{(n-1)} (x_i^2) ,$$

da cui

$$na^2 < \frac{3}{2} \Sigma_{(n-1)} (2ax_i - x_i^2) ,$$

e perciò

$$\frac{C}{V'_n} < \frac{3}{2}$$

Per conseguenza

$$V_n < \frac{2}{3} C < V'_n .$$

Ciò posto, ARCHIMEDE dimostra che il volume V del semiellissoide non può essere maggiore o minore di $\frac{2}{3} C$, e che quindi è

$$V = \frac{2}{3} C = \frac{2}{3} \pi b^2 a .$$

Lo stesso risultato si ottiene calcolando direttamente V con l'integrale

$$\frac{b^2}{a^2}\int_0^a (2ax - x^2)\, dx \ ,$$

il cui calcolo fu da ARCHIMEDE con le considerazioni suesposte anticipato.

Ragionamenti analoghi si possono ripetere quando la base non è perpendicolare all'asse (prop. 28).

14. – **Volume di un segmento d'ellissoide minore di un semiellissoide.** (*Sui conoidi*, ecc., propp. 29, 30).

Sia un ellissoide di assi $2a$, $2b$, $a > b$, e sia un segmento di esso determinato da un piano perpendicolare all'asse a, minore di un semiellissoide. L'altezza del segmento sia k e il diametro del cerchio base sia $2q$.

Si divida k in n parti uguali:

$$x_1 = \frac{k}{n} = h\ ;\ x_2 = 2h\ ;\ \ldots\ ;\ x_n = nh = k\ .$$

Si inscriva al segmento uno scaloide cilindrico V_n, e se ne circoscriva un altro V'_n e si immagini il

cilindro C costruito sul circolo base di diametro $2q$ e di altezza k. Prolungando i piani delle basi di V_n anche il cilindro C resta diviso in n cilindri, ciascuno uguale al massimo di quelli che formano V'_n, di raggio q e altezza h. I raggi dei cilindri inscritti siano $y_1, y_2 \ldots, y_{n-1}$; quelli dei cilindri circoscritti sieno $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}, y_n = q$.

Anche qui si ha primieramente:

$$\begin{aligned}(\text{un cil. di } C) : (\text{cil. di } V_n) &= q^2 : y_i^2 \\ &= k\ (2a - k) : x_i\ (2a - x_i) \\ &\quad (\text{per la proprietà dell'ellisse}).\end{aligned}$$

Quindi

$$C : V_n = nk\ (2a - k) : \Sigma\, x_i\ (2a - x_i)$$
$$(i = 1, 2, \ldots, n - 1)$$

Ora si osservi che è in generale

$$\begin{aligned}k\ (2a - k) - x\ (2a - x) &= (k - x)\ (2a - k - x) \\ &= (k - x)\ (2a - 2k) + (k - x)^2\,;\end{aligned}$$

e quindi

$$\begin{aligned}nk\ (2a - k) - \Sigma_{(n-1)}\, x_i\ (2a - x_i) &= \\ \Sigma_n = [(k - x_i)\ (2a - 2k) &+ (k - x_i)^2]\,.\end{aligned}$$

Allora (prop. 2)

$$nk\,(2a - k) : nk\,(2a - k) - \Sigma_{(n-1)}\,(x_i\,(2a -)\,x_i$$
$$< (2a - k) : \frac{3a - 2k}{3},$$

da cui

$$nk\,(2a - k) : \Sigma_{(n-1)} > (2a - k) : \frac{3a - k}{3},$$

e quindi

$$\frac{C}{V_n} > \frac{2a - k}{\dfrac{3a - k}{3}}.$$

Considerando lo scaloide circoscritto V'_n si ha analogamente

$$C : V'_n = nk\,(2a - k) : \Sigma_n xi\,(2a - xi).$$

Ma ora è

$$nk\,(2a - k) - \Sigma_n = \Sigma_{(n-1)}\,[(k - x)\,(2a - 2k)$$
$$+ (k - x)^2],$$

e quindi

$$nk\,(2a - k) : nk\,(2a - k) - \Sigma_n > (2a - k) : \frac{3a - 2k}{3},$$

da cui

$$nk\ (2a - k) : \Sigma_n < (2a - k) : \frac{3a - k}{3},$$

e perciò

$$\frac{C}{V'_n} < \frac{2a - k}{\frac{3a - k}{3}}.$$

Risulta infine

$$V_n < \frac{3a - k}{3\ (2a - k)}\ C < V'_n.$$

Da ciò ARCHIMEDE deduce, ragionando sempre per assurdo, che è

$$V = \frac{3a - k}{3\ (2a - k)}\ C = \frac{1}{3} \cdot \frac{\pi\ q^2\ k\ (3a - k)}{2a - k}.$$

E siccome per la proprietà dell'ellisse è

$$q^2 = \frac{b^2\ k\ (2a - k)}{a^2},$$

si ha

$$V = \frac{1}{3}\ \frac{\pi\ b^2\ k^2\ (3a - k)}{a^2}.$$

È questa la formula che si ottiene calcolando il volume del segmento mediante l'integrale

$$\frac{b^2}{a^2}\int_0^k (2ax - x^2)dx .$$

Gli stessi ragionamenti si applicano facilmente anche al caso di un segmento la cui base non è perpendicolare all'asse.

15. – **Determinazione di centri di gravità.**

L'applicazione genialmente condotta del *Metodo* esposto permise ad ARCHIMEDE di determinare con semplicità meravigliosa il centro di gravità dei solidi di rotazione. Prima di lui le ricerche sui centri di gravità non esistevano forse, o erano limitate ai casi di immediata soluzione, alle figure più semplici.

Il nuovo opuscolo contiene cinque teoremi sui centri di gravità (centro di gravità di un paraboloide, di un segmento sferico uguale o minore di un emisfero, di un segmento d'ellissoide, di un iperboloide) e forma un complemento desiderato e prezioso delle altre sue opere, nelle quali non si contengono che

i teoremi sul centro di gravità di poligoni piani rettilinei, e di un segmento parabolico.

I risultati di ARCHIMEDE si possono riassumere dicendo che il centro di gravità dei solidi da esso considerati, solidi di rotazione, si trova sull'asse, a una distanza dal vertice che è data dal quoziente fra il momento del solido rispetto allo stesso vertice e il suo volume. Il momento poi è espresso mediante una figura ausiliaria (che nei casi considerati è un cono) di cui sia noto il centro di gravità.

A titolo di esempio riporterò le proposizioni V e VI del *Metodo*.

Centri di gravità di un paraboloide, prop. V. — Sia $AD = 2a$ l'asse del segmento di paraboloide e $y^2 = 2px$ l'equazione della parabola, sezione del paraboloide con un piano passante per l'asse. Un piano perpendicolare all'asse per un punto di ascissa x ($AS = x$) sega il paraboloide ed il cono inscritto rispettivamente secondo circoli che potremo indicare con T e V e la cui area è

$$T = \pi y^2,$$

$$V = \pi . QS^2 = \frac{\pi}{2a} y^2 x = \frac{T}{2a} x .$$

Immaginando il cerchio V sospeso nell'estremo H della leva DH avente il fulcro in A (essendo $AH = HD$) e il cerchio T sospeso alla distanza x dal fulcro si ha la condizione d'equilibrio:

$$2a : x = T : V .$$

Similmente per ogni altra sezione; cosicchè il momento di un circolo qualunque del paraboloide è uguale al momento del circolo corrispondente del cono portato in H.

Ne segue che il momento del cono sospeso per il suo centro di gravità in H è uguale al momento del paraboloide situato al suo posto; cioè, indicando con X l'ascissa del centro di gravità del paraboloide,

$$2a : X = \pi \int_0^{2a} T\, dx : \pi \int_0^{2a} V\, dx ,$$

da cui

$$X = \frac{2a \int_0^{2a} V dx}{\int_0^{2a} T dx} = \frac{\int_0^{2a} x \, . \, T dx}{\int_0^{2a} T dx} ;$$

e perciò

$$X = \frac{2}{3} (2a) ; \quad AK = \frac{2}{3} \, . \, AD .$$

Centro di gravità di un emisfero, prop. VI. — Sia $AG = a$ il raggio dell'emisfero, e si prolunghi oltre A fino in H, in modo che sia $AH = 2a$. Sia ABD il cono inscritto nell'emisfero.

Con un piano perpendicolare al raggio alla distanza x da A si seghi l'emisfero ed il cono, e siano T, V le loro rispettive sezioni.

Si ha con facili considerazioni geometriche

$$2a : x = T + V : V.$$

Di qui si deduce che il cono sospeso in H fa equilibrio al sistema (Emisfero + Cono) situati al loro posto.

Ma siccome la distanza da A del centro di gravità del cono inscritto è $\frac{3}{4}a$, il momento di esso è uguale al momento di $\frac{3}{8}$ del cono stesso posto in H; onde il momento dell'emisfero sarà uguale al momento dei $\frac{5}{8}$ del cono posto in H. Cioè, indicando con X l'ascissa del centro di gravità dell'emisfero,

$$X \ . \ (\text{emisfero}) = \frac{5}{4} a \ . \ (\text{cono}) \ ,$$

e quindi

$$X = \frac{\frac{5}{4} a \int_0^a x^2 \, dx}{\int_0^a (2ax - x^2) \, dx} = \frac{5}{8} a .$$

Per un segmento sferico qualunque di altezza k (prop. IX), si ha

$$X = \frac{2a + 3k}{4} \cdot \frac{\int_0^{2a-k} x^2 \, dx}{\int_0^{2a-k} (2ax - x^2) \, dx}$$

$$= \frac{(2a + 3k)\,(2a - k)}{4\,(a + k)} .$$

È forse utile osservare che in questi esempi l'uso del cono non è che un abile artificio di calcolo per evitare la complicazione di integrazioni nuove; tolta questa difficoltà, il procedimento si mostra applicabile su scala assai più vasta e contiene in germe la regola su ricordata, che tuttora si adopera per trovare il centro di gravità delle figure geometriche, e alla quale diede forma precisa il TORRICELLI.

16. – Conclusione.

Ho cercato di raccogliere nelle pagine precedenti le notizie più significative per illustrare il pensiero dei matematici greci di fronte ai problemi e ai metodi che han dato origine all'Analisi Infinitesimale, e per valutare il contributo da essi portato alla formazione della nuova scienza.

Nella critica parmenidea dei principii della geometria viene affermato il carattere infinitesimale dei concetti fondamentali: punto, linea, superficie. La dialettica di ZENONE sviluppa la dottrina del suo maestro e pone la tesi della *continuità* delle grandezze geometriche e il principio della *divisibilità infinita*.

Si può osservare che la critica eleatica, mentre stabiliva con la sua formidabile dialettica il concetto razionale della geometria, poneva, senza risolverlo, il problema dell'infinito. D'altra parte essa offriva ai matematici un nuovo metodo di ricerca, il metodo infinitesimale, di cui riscontriamo i primi esempii nei procedimenti di DEMOCRITO per la cubatura della piramide e del cono e nei tenta-

tivi per la quadratura del cerchio, che si riflettono negli studii di IPPOCRATE.

Ma erano procedimenti privi di una base logica. Essi davano luogo a serie geometriche decrescenti, di cui si ammetteva la convergenza, per ragioni quasi intuitive, senza dimostrarla con dimostrazioni rigorose.

La sistemazione critica di tali procedimenti fu opera di EUDOSSO, le cui dimostrazioni per esaustione costituiscono indubbiamente la prima forma legittima di analisi infinitesimale. Queste dimostrazioni assicurarono la validità dei tentativi precedenti e fecero cessare le polemiche antimatematiche che l'uso dell'infinito aveva suscitato. Avrebbero dovuto anche stimolare nuove ricerche; seguì invece, a questo riguardo, un lungo periodo di inattività.

Ad ARCHIMEDE si deve la più efficace ripresa delle ricerche infinitesimali. Nella sua opera si assomma tutta l'Analisi infinitesimale degli antichi; essa, inoltre, per la profondità dei concetti che la inspirano, per la sicurezza dei metodi e la vastità delle applicazioni, merita di essere considerata come la più importante anticipazione della nostra Analisi.

Nelle sue ricerche ARCHIMEDE riguardò chiaramente l'area e il volume come somma di elementi infinitesimi, e diede il primo efficace esempio dei procedimenti infinitesimali per la determinazione delle aree, dei volumi, dei centri di gravità. Inoltre, nelle sue rigorose dimostrazioni geometriche preparò la sistemazione critica del concetto di integrale; in esse infatti si riguarda costantemente l'area e il volume di una figura come il « limite comune » delle serie (infinite) dei poligoni o degli scaloidi inscritti e circoscritti.

Il *Metodo* non fu conosciuto dai grandi studiosi del Rinascimento; ma nelle altre opere non era troppo difficile scorgervi le idee direttrici delle sue ricerche. È un fatto che tutti i precursori del Calcolo Integrale ripetono da ARCHIMEDE il principio dei loro studi e lavorano inspirandosi al suo esempio, adoperando i suoi mezzi.

LUCA VALERIO (1552-1618) dallo studio di ARCHIMEDE trae i fondamenti di una teoria dei limiti e l'applica per proseguire le ricerche sui centri di gravità dei corpi rotondi (*De centro gravitatis solidorum,* 1604).

KEPLERO (1571-1630) nella *Stereometria Archimedea* (che precede la *Stereometria doliorum,* 1615)

riconosce il carattere infinitesimale delle ricerche del sommo Siracusano e ne espone il trattato *Sulla Sfera e sul Cilindro* senza le lunghe dimostrazioni per esaustione, introducendo direttamente le grandezze « infinitamente piccole » e considerando, per esempio, la sfera « come se » fosse composta di un infinito di coni. Con abilità singolare KEPLERO approfittò di queste concezioni riuscendo a calcolare i volumi di un gran numero di solidi di rotazione.

Così quegli stessi procedimenti infinitesimali che assicurarono il successo agli studi di ARCHIMEDE ridonarono vita e vigore agli studi matematici e ne diressero i primi passi sulla via delle più brillanti conquiste. Tra le quali basti ricordare la *Geometria degli Indivisibili* (1635) di BONAVENTURA CAVALIERI (1591-1647) per valutarne la immensa portata.

KEPLERO non si preoccupò di accompagnare i suoi risultati con la consueta dimostrazione per esaustione; e, come lui, la maggior parte dei suoi contemporanei. In questo forse più che l'abbandono o la noncuranza delle rigide esigenze della scienza antica, bisogna vedere un segno della rinnovata energia e una fiducia quasi completa nei procedi-

menti infinitesimali, fiducia che probabilmente trovava anche la sua giustificazione nelle opere degli antichi geometri e più specialmente in ARCHIMEDE. I loro procedimenti partivano dalle stesse premesse, da cui partivano i procedimenti archimedei. Tutti i risultati di ARCHIMEDE furono rigorosamente dimostrati; anche ai nuovi risultati era possibile applicare lo stesso metodo di dimostrazione; e perciò si poteva ad essi accordare la stessa certezza.

L'equivalenza fra il metodo degli indivisibili e il metodo d'esaustione venne infatti riconosciuta da tutti i cultori del primo e ripetutamente affermata per difendere il nuovo metodo dagli attacchi di coloro che lo riguardavano come un pericolo per il rigore scientifico, gelosamente custodito dalla scuola antica. BIAGIO PASCAL (1623-1662) affermava: « Tout ce qui est démontré par la véritable règle des indivisibles se démontre aussi à la rigueur, et à la manière des anciens; et... l'une de ces méthodes ne diffère de l'autre, qu'en la manière de parler; ce qui ne peut blesser les personnes raisonnables, quand on les a une fois averties de ce qu'on entend par là.... ».

Appare così manifesto il legame della nuova matematica con l'antica, cioè, sopratutto, con l'opera archimedea; la messe rigogliosa raccolta dai matematici del sec. XVI e XVII fu principalmente il frutto del seme che circa 19 secoli prima aveva gettato ARCHIMEDE.

NOTA BIBLIOGRAFICA.

Senza voler fare un elenco completo di tutte le opere che più o meno distesamente si occupano di argomenti trattati in questo studio, limito il presente elenco alle sole pubblicazioni che ho più particolarmente utilizzate, o che ho avuto occasione di citare.

APOLLONIO: *Apollonii Pergaei quae graece extant cum commentariis antiquis*, ed. Heiberg, Lipsiae, 1891-93.

ARCHIMEDE: *Archimedis Opera omnia cum commentariis Eutocii*, ed. Heiberg, 2ª ed., Lipsiae, vol. I, 1910, vol. II, 1913.

— *The works of Archimedes edited in modern notation by* TH. L. HEATH, Cambridge, 1897; *Supplement*, 1912 (con la traduzione del *Metodo*).

— *Archimedes' Werke... herausgegeben von* T. L. HEATH, *deutsch von* F. KLIEM, Berlin, 1914. (Ho adoperato di preferenza questa edizione della traduzione dell'Heath).

— *Œuvres complètes traduites par* P. VER EECKE, Paris-Bruxelles, 1921.

ARISTOTELE: *Aristotelis Opera*, ed. J. BEKKER, Berolini, 1831-2.

BORTOLOTTI ETTORE: *Le prime applicazioni del calcolo integrale alla determinazione del centro di gravità di figure geometriche*, in *Atti Accad. di Bologna*, 1922 (esposizione delle ricerche di Torricelli, v. pag. 111 e 156).

BOSMANS H.: *Les démonstrations par l'Analyse Infinitésimale chez Luc Valerio*, in *Ann. de la Soc. scient. de Bruxelles*, XXXVII, 2 fasc., 1913, p. 5-22.

— *La notion des « indivisibles » chez Blaise Pascal*, in *Arch. di St. della Sc.*, IV (1923), pag. 369-79

DIELS H.: *Die Fragmente der Vorsokratiker*, 3ª ed., Berlino, 1912.

ENRIQUES F.: *Sul procedimento di riduzione all'assurdo*, in *Boll. di « Mathesis »*, anno XI, 1919.

— *La relatività del movimento nell'antica Grecia*, in *Period. di Mat.*, serie IV, vol. I, 1921.

— *Le venerabili proprietà della materia*, ibid., vol. II, 1922, pag. 117 sg.

— *La polemica eleatica per il concetto razionale della geometria*, ibid., vol. III, 1923, pag. 72 sg.

— *L'evoluzione delle idee geometriche nel pensiero greco*, in *Questioni riguardanti le Mat. elem.*, vol. I, Bologna 1924.

— *Per la storia della Logica. I principii e l'ordine della scienza nel concetto dei pensatori matematici*, Bologna, 1922 (Cap. I: « La logica degli antichi »).

EUCLIDE: *Euclidis Elementa*, ed. I. L. Heiberg, Lipsiae, 1883-88.

— *The thirteen books of Euclid's Elements translated from the text of Heiberg with Introduction and Commentary, by* T. L. HEATH, 3 voll., Cambridge, 1908.

HEATH T. L., *A history of Greek Mathematics*, 2 voll., Oxford, 1921. (V. ARCHIMEDE, EUCLIDE).

HEIBERG J. L., *Le rôle d'Archimède dans le développement des sciences exactes*, in *Scientia*, 1916, n. 8.

— *Naturwissenschaften, Mathematik und Medizin im Klassischen Altertum*, 2ª ed., Leipzig, 1920.

LORIA G.: *Le scienze esatte nell'antica Grecia*, 2ª ed., Milano, 1914.

— *L'infinito e l'infinitesimo secondo i matematici dell'antichità e i matematici moderni anteriori al sec. XVIII*, in *Scientia*, 1915, n. 12; 1916, n. 1.

PROCLO: *Procli Diadochi in primum Euclidis elementorum librum commentarii*, ed. Friedlein, Lipsiae, 1873.

TANNERY P.: *Pour l'histoire de la Science hellène*, Paris, 1887 (specialmente i capitoli IX, X).

TOGLIATTI E. G.: *Sul volume della sfera*, in *Period. di Matematica*, serie IV, vol. II, 1922; pag. 305-26 (ai nn. 1-4 è esposto il metodo di ARCHIMEDE).

VACCA G.: *Sull'* Ἔφοδος *di Archimede*, in *Acc. dei Lincei*, vol. XXXIII, 1914, pp. 850-54.

— *Piero della Francesca nella storia dell'Algebra ed i suoi tentativi di dimostrazione di due teoremi di Archimede*, in *Accad. delle Scienze di Napoli*, serie 3ª, vol. XXVI, 1920.

ZEUTHEN H. G.: *Die Lehre von den Kegelschnitten im Altertum*, Kopenaghen, 1886 (cap. 20: « Archimedes' Bestimmungen von Flächen, Rauminhalten und Schwerpunkten).

— *Histoire des Mathématiques dans l'antiquité*, trad. franc., par Mascart, Paris, 1902.

— *Geschichte der Mathematik im XVI u. XVII Jahr.*, Leipzig, 1903.

* * *

TRADUZIONI DEL « METODO ». Oltre quelle che si trovano nelle citate edizioni delle opere di ARCHIMEDE, ricordo le traduzioni seguenti:

in tedesco: J. L. HEIBERG, *Eine neue Schrift des Archimedes*, con un ampio commento di H. G. ZEUTHEN, in *Bibl. Mathem.*, III Folge, VII, 1907.

in francese: T. REINACH, *Un traité de géométrie inédit d'Archimède*, con introduzione di P. PAINLEVÉ, in *Revue gén. des sciences*, 30 nov. et 15 déc., 1907.

in inglese: L. B. ROBINSON, *A newly discovered Treatise of Archimedes*, con un commento di D. E. SMITH, in *The Monist*, april, 1909.

in italiano: [E. GRADARA], *Il Metodo di Archimede*, in *Rassegna di Mat. e fis.*, anno III (n. 12), an. IV (nn. 1-3), 1923-24.

INDICE DEI NOMI

INDICE